매쓰제닉 쪽지시험 · 고2 수학 II · 도함수의 활용 · 11월 1주차 정답 및 풀이

ID : WQ-2026-고2-11-01-SOL 출제 : MathGenix

본 자료의 저작권은 MathGenix에 있습니다. 무단 복제·배포·재가공 금지 | https://mathgenix.net

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
④	③	③	③	③	③	③	③	63	③

1. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 도함수의 부호를 통해 원시함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $F(x)$ 가 감소하는 구간은 $F'(x)<0$ 인 구간입니다.

문제의 조건에서 $F'(x)=f(x)$ 이므로, $f(x)<0$ 인 x 의 값의 범위를 구하면 됩니다.

$f(x)=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)(x-1)(x-5)<0$

위 이차부등식의 해는 $1<x<5$ 입니다.

따라서 함수 $F(x)$ 가 감소하는 구간은 $(1,5)$ 이므로 $\alpha=1$, $\beta=5$ 입니다.

구하는 값은 $\beta-\alpha=5-1=4$ 입니다.

[정답] ④

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수의 극값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x)=6x^2-6x-12$ 이다.

$f'(x)=0$ 에서 $6(x^2-x-2)=0$ 이므로, $6(x+1)(x-2)=0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

구하는 극댓값은 $f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)+5=-2-3+12+5=12$ 이다.

[정답] ③

3. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

주어진 극한값은 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수 $f'(2)$ 의 정의와 같다.

$f'(x)=3x^2-2$

따라서 $f'(2)=3(2)^2-2=12-2=10$ 이다.

[정답] ③

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 평균값 정리의 구조를 이해하고, 함수의 대칭성과 함숫값 조건을 이용하여 다항함수를 결정하는 능력을 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 점 $(0, f(0))$ 에 대하여 대칭이므로, 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = x^3 + ax + b$ 꼴이다.

$f'(x) = 3x^2 + a$ 이다.

조건 (가)의 좌변은 함수 $f(x)$ 에 대한 구간 $[-x, x]$ 에서의 평균변화율과 같다.

$\frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \frac{(x^3 + ax + b) - (-x^3 - ax + b)}{2x} = \frac{2x^3 + 2ax}{2x} = x^2 + a$

조건 (가)에 의해 $x^2 + a = f'(g(x)) = 3\{g(x)\}^2 + a$ 이다.

따라서 $x^2 = 3\{g(x)\}^2$ 이고, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 또는 $g(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 이거나 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

조건 (나)에서 $f(1) = 2$ 이므로 $1 + a + b = 2$, 즉 $a + b = 1$ 이다.

(i) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ 일 때:

$h(\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) + g(\sqrt{3}) = ((\sqrt{3})^3 + a\sqrt{3} + b) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5(3\sqrt{3} + a\sqrt{3} + b) + 1 = 5\sqrt{3}(3 + a) + b = 4b = 1 - a$ 를 대입하면,

$\sqrt{3}(3 + a) + (1 - a) = 43\sqrt{3} + a\sqrt{3} + 1 - a = 4a(\sqrt{3} - 1) = 3 - 3\sqrt{3} = -3(\sqrt{3} - 1)a = -3$ 이고, $b = 1 - a = 4$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 4$ 이다.

(ii) $g(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ 일 때:

$h(\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) + g(\sqrt{3}) = ((\sqrt{3})^3 + a\sqrt{3} + b) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5(3\sqrt{3} + a\sqrt{3} + b) - 1 = 5\sqrt{3}(3 + a) + b = 6b = 1 - a$ 를 대입하면,

$\sqrt{3}(3 + a) + (1 - a) = 6a(\sqrt{3} - 1) = 5 - 3\sqrt{3}a = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$, 이는 정수가 아니므로 문제의 의도와 거리가 멀다.

(i)에서 구한 $f(x) = x^3 - 3x + 4$ 이므로,

$f(2) = 2^3 - 3(2) + 4 = 8 - 6 + 4 = 6$ 이다.

[정답] ③

---

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수의 부호를 이용하여 주어진 구간에서 함수가 감소하기 위한 조건을 구하고, 이를 만족시키는 미지수의 범위를 찾을 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소하려면, 이 구간에서 $f'(x) \le 0$ 을 만족해야 한다.

$f'(x) = -3x^2 + 2ax - a$.

$g(x) = f'(x)$ 라 하면, $g(x)$ 는 위로 볼록한 이차함수이고 대칭축의 방정식은 $x = \frac{-2a}{2(-3)} = \frac{a}{3}$ 이다.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \le 0$ 이어야 한다.

(i) 대칭축이 $x \le 0$ 에 있을 경우, 즉 a/3 ≤ 0 ⇒ a ≤ 0x>0에서 $g(x)$ 는 감소하므로, 구간의 경계인 $g(0)$ 의 값이 0 보다 작거나 같으면 된다.

$g(0) = -a \le 0$, 즉 $a \ge 0$ 이다.

두 조건을 동시에 만족하는 a 의 값은 $a = 0$ 뿐이다.

(ii) 대칭축이 $x > 0$ 에 있을 경우, 즉 a/3 > 0 ⇒ a > 0x>0에서 $g(x)$ 의 최댓값은 꼭짓점의 함숫값인 $g(a/3)$ 이다. 이 최댓값이 0 보다 작거나 같아야 한다.

$g(a/3) = -3(\frac{a}{3})^2 + 2a(\frac{a}{3}) - a = -\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - a = \frac{a^2}{3} - a \le 0$.

a^2 - 3a ≤ 0 ⇒ a(a-3) ≤ 0.

따라서 $0 \le a \le 3$ 이다.
$a > 0$ 조건과 공통 범위를 구하면 $0 < a \le 3$ 이다.

(i), (ii)의 결과를 종합하면 a 의 범위는 $0 \le a \le 3$ 이다.
따라서 실수 a 의 최댓값은 3이다.

[정답] ③

---

6. 정답 및 풀이

정답: ③
[출제의도] 도함수를 활용하여 주어진 구간에서 함수의 최솟값을 구하고, 이를 통해 미지수의 범위를 추론할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]
주어진 부등식 $f(x) \ge g(x)$ 를 정리하면 $x^3 - 6x^2 + 5 \ge -9x + k$ 이고, k 에 대하여 정리하면 $x^3 - 6x^2 + 9x + 5 \ge k$ 이다.
$h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ 라 하자. 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 부등식 $h(x) \ge k$ 가 항상 성립하려면, k 는 $h(x)$ 의 최솟값보다 작거나 같아야 한다. 따라서 k 의 최댓값은 $h(x)$ 의 최솟값과 같다.
$h(x)$ 의 최솟값을 구하기 위해 도함수를 구하면,
$h'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3) h'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값은 $x = 1$, $x = 3$ 이며, 두 값 모두 닫힌구간 $[0, 4]$ 에 포함된다.
구간의 양 끝점과 극값을 비교하여 최솟값을 찾는다.
$h(0) = 5 h(1) = 1 - 6 + 9 + 5 = 9 h(3) = 27 - 54 + 27 + 5 = 5 h(4) = 64 - 96 + 36 + 5 = 9$
따라서 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 5 이다.
$k \le 5$ 이므로, 실수 k 의 최댓값은 5 이다.

[정답] ③

---

7. 정답 및 풀이

정답: ③
[출제의도] 도함수를 활용하여 닫힌 구간에서 정의된 삼차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]
$f(x) = 2x_1 - 3x\text{ffl} - 12x + k$ 에서, $f'(x) = 6x\text{ffl} - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$ 이다.
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이므로, 구간 $[-2, 2]$ 내의 극값 후보는 $x = -1, x = 2$ 이다.
구간의 양 끝점 $x = -2, x = 2$ 와 극값 후보 $x = -1$ 에서의 함숫값은 다음과 같다.
$f(-2) = -16 - 12 + 24 + k = -4 + k f(-1) = -2 - 3 + 12 + k = 7 + k f(2) = 16 - 12 - 24 + k = -20 + k$
주어진 조건에서 최댓값이 10이므로 $f(-1) = 7 + k = 10$ 에서 $k = 3$ 이다.
따라서 최솟값은 $f(2) = -20 + k = -20 + 3 = -17$ 이다.

[정답] ③

---

8. 정답 및 풀이

정답: ③
[간략 풀이]
[출제의도] 절댓값 함수의 미분가능성 조건을 통해 함수식을 추론하고, 도함수의 근 조건을 활용해 특정 함숫값의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.
[풀이]
조건 (가)에서 함수 $|g(x)|$ 가 오직 $x = 1$ 에서만 미분가능하지 않으므로, 삼차함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 을 단일 실근으로, 다른 한 실근을 중근으로 가져야 한다.
$g(x) = (x-1) f(x)$ 이고 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로, $f(x) = (x-\alpha)^2$ (단, $\alpha \ne 1$) 꼴이다.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-\alpha)^2$ 이다.

$g'(x)=(x-\alpha)^2+2(x-1)(x-\alpha)=(x-\alpha)\{(x-\alpha)+2(x-1)\}=(x-\alpha)(3x-\alpha-2)g'(x)=0$ 의 근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha+2}{3}$ 이다.

조건 (나)에 의해 두 근 중 적어도 하나가 닫힌 구간 $[-3,\ -1]$ 에 존재해야 한다.

⋯ 반복되는 후보 계산은 생략합니다. ⋯

$M=(-11-2)^2=(-13)^2=169$

최솟값 m 은 α 가 가장 큰 값인 $\alpha=-1$ 일 때이다.

$m=(-1-2)^2=(-3)^2=9$

따라서 $M+m=169+9=178$ 이다.

[정답] ③

---

9. 정답 및 풀이

정답: 63

[출제의도]

도함수를 활용하여 주어진 조건을 만족하는 함수의 그래프 개형을 추론하고, 유일성 조건을 통해 특정 지점에서의 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $h(t)$ 는 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수입니다. 함수 $g(x)$ 는 구간 $(-\infty,2]$ 에서 정의되고 $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ 이므로, $h(t)$ 가 오직 한 점에서만 불연속이 되려면 함수 $g(x)$ 는 이 구간에서 단조증가해야 합니다. 만약 $g(x)$ 가 극값을 가지면 불연속점이 두 개 이상 생기기 때문입니다.

$g(x)$ 를 미분하면 $g'(x)=f'(x)+\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$ 입니다. $\lim_{x\to2^-}g'(x)=\infty$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=2$ 근방에서 증가합니다. 따라서 $g(x)$ 가 단조증가하기 위해서는 모든 $x<2$ 에 대하여 $g'(x)\geq0$ 이어야 합니다.

문제의 함수 $f(x)$ 가 유일하게 결정되려면, $g'(x)$ 의 최솟값이 0이 되는 경계 조건을 만족해야 합니다. $g'(x)$ 의 최솟값이 0이 되는 점의 x 좌표를 s 라 하면, $g'(s)=0$ 이고 $g''(s)=0$ 이어야 합니다.

(1) $g'(s)=f'(s)+\frac{1}{\sqrt{4-2s}}=0\Rightarrow f'(s)=-\frac{1}{\sqrt{4-2s}}$

(2) $g''(s)=f''(s)+\frac{1}{(4-2s)^{3/2}}=0\Rightarrow f''(s)=-\frac{1}{(4-2s)^{3/2}}$

주어진 조건 $f(0)=2$ 를 이용하여 $s=0$ 일 가능성을 확인합니다.

$s=0$ 을 대입하면, $f'(0)=-\frac{1}{\sqrt{4}}=-\frac{1}{2}$ 이고, $f''(0)=-\frac{1}{4^{3/2}}=-\frac{1}{8}$ 입니다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면, $f(0)=2$ 이므로 $c=2$ 입니다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서 $f'(0)=b=-\frac{1}{2}$ 입니다.

$f''(x)=6x+2a$ 에서 $f''(0)=2a=-\frac{1}{8}$, 즉 $a=-\frac{1}{16}$ 입니다.

따라서 $f(x)=x^3-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}x+2$ 로 유일하게 결정됩니다. 이때 $g'(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 0을 가지므로 문제의 모든 조건을 만족합니다.

구하는 값은 $f(4)$ 입니다.

$f(4)=4^3-\frac{1}{16}(4^2)-\frac{1}{2}(4)+2=64-1-2+2=63$.

---

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[간략 풀이]

[출제의도]

집합의 연산과 함수의 그래프 개형을 연결하여 주어진 조건을 만족하는 함수를 추론하고, 추가적인 조건을 이용하여 함수를 결정한 후 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $y=F(x)$ 와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 t 가 함수 $F(x)$ 의 극값이 될 때 변하므로, 함수 $h_F(t)$ 가 불연속인 t 의 값의 집합은 $F(x)$ 의 극값의 집합과 같다.

따라서 S_f 는 $f(x)$ 의 극값의 집합이고, S_g 는 $g(x)$ 의 극값의 집합이다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지므로 $n(S_f)=2$ 이고, 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $g(x)$ 는 최댓값(극값)을

가지므로 $n(S_g)=1$ 이다.

조건 $S_f \cup S_g = \{0,3,4\}$ 와 $S_f - S_g = \{0,4\}$ 에서,

… 반복되는 후보 계산은 생략합니다. …

- $p=-2$ 이면 $g'(x)=-2(x+2)$. $L'(x)=3x^2-10x+13$. $D/4=25-39<0$. 이 경우만 $D<0$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 이고 $g(x)=-(x+2)^2+3$ 이다.

$f(4)=4^3-6(4^2)+9(4)=64-96+36=4$.

$g(4)=-(4+2)^2+3=-36+3=-33$.

$f(4)+g(4)=4+(-33)=-29$.

© 2026 MathGenix · 무단 복제·배포·재가공 금지 · https://mathgenix.net