매쓰제닉 쪽지시험 · 고2 수학 II · 도함수의 활용 · 10월 4주차 정답 및 풀이

ID : WQ-2026-고2-10-04-SOL 출제 : MathGenix

본 자료의 저작권은 MathGenix에 있습니다. 무단 복제·배포·재가공 금지 | https://mathgenix.net

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	④	③	③	③	③	②	③	63

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

주어진 극한값은 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수 $f'(2)$ 의 정의와 같다.

$f'(x)=3x^2-2$

따라서 $f'(2)=3(2)^2-2=12-2=10$ 이다.

[정답] ③

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항함수의 도함수를 활용하여 함수의 극값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x)=6x^2-6x-12$ 이다.

$f'(x)=0$ 에서 $6(x^2-x-2)=0$ 이므로, $6(x+1)(x-2)=0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

구하는 극댓값은 $f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)+5=-2-3+12+5=12$ 이다.

[정답] ③

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 도함수의 부호를 통해 원시함수의 증가와 감소를 판정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $F(x)$ 가 감소하는 구간은 $F'(x)<0$ 인 구간입니다.

문제의 조건에서 $F'(x)=f(x)$ 이므로, $f(x)<0$ 인 x 의 값의 범위를 구하면 됩니다.

$f(x)=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)(x-1)(x-5)<0$

위 이차부등식의 해는 $1<x<5$ 입니다.

따라서 함수 $F(x)$ 가 감소하는 구간은 $(1,5)$ 이므로 $\alpha=1$, $\beta=5$ 입니다.

구하는 값은 $\beta-\alpha=5-1=4$ 입니다.

[정답] ④

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수를 활용하여 닫힌 구간에서 정의된 삼차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f(x)=2x_1-3x\text{ffl}-12x+k$ 에서, $f'(x)=6x\text{ffl}-6x-12=6(x+1)(x-2)$ 이다.

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$ 이므로, 구간 $[-2,2]$ 내의 극값 후보는 $x=-1, x=2$ 이다.

구간의 양 끝점 $x=-2, x=2$ 와 극값 후보 $x=-1$ 에서의 함숫값은 다음과 같다.

$f(-2)=-16-12+24+k=-4+kf(-1)=-2-3+12+k=7+kf(2)=16-12-24+k=-20+k$

주어진 조건에서 최댓값이 10이므로 $f(-1)=7+k=10$ 에서 $k=3$ 이다.

따라서 최솟값은 $f(2)=-20+k=-20+3=-17$ 이다.

[정답] ③

---

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수를 활용하여 주어진 구간에서 함수의 최솟값을 구하고, 이를 통해 미지수의 범위를 추론할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 부등식 $f(x)\geq g(x)$ 를 정리하면 $x^3-6x^2+5\geq -9x+k$ 이고, k 에 대하여 정리하면 $x^3-6x^2+9x+5\geq k$ 이다.

$h(x)=x^3-6x^2+9x+5$ 라 하자. 닫힌구간 $[0,4]$ 에서 부등식 $h(x)\geq k$ 가 항상 성립하려면, k 는 $h(x)$ 의 최솟값보다 작거나 같아야 한다. 따라서 k 의 최댓값은 $h(x)$ 의 최솟값과 같다.

$h(x)$ 의 최솟값을 구하기 위해 도함수를 구하면,

$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)h'(x)=0$ 이 되는 x 의 값은 $x=1$, $x=3$ 이며, 두 값 모두 닫힌구간 $[0,4]$ 에 포함된다.

구간의 양 끝점과 극값을 비교하여 최솟값을 찾는다.

$h(0)=5h(1)=1-6+9+5=9h(3)=27-54+27+5=5h(4)=64-96+36+5=9$

따라서 닫힌구간 $[0,4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 5 이다.

$k\leq 5$ 이므로, 실수 k 의 최댓값은 5 이다.

[정답] ③

---

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 평균값 정리의 구조를 이해하고, 함수의 대칭성과 함숫값 조건을 이용하여 다항함수를 결정하는 능력을 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1이고 점 $(0,f(0))$ 에 대하여 대칭이므로, 함수 $f(x)$ 는 $f(x)=x^3+ax+b$ 꼴이다.

$f'(x)=3x^2+a$ 이다.

조건 (가)의 좌변은 함수 $f(x)$ 에 대한 구간 $[-x,x]$ 에서의 평균변화율과 같다.

$\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=\frac{(x^3+ax+b)-(-x^3-ax+b)}{2x}=\frac{2x^3+2ax}{2x}=x^2+a$

조건 (가)에 의해 $x^2+a=f'(g(x))=3\{g(x)\}^2+a$ 이다.

따라서 $x^2=3\{g(x)\}^2$ 이고, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}$ 또는 $g(x)=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이거나 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

조건 (나)에서 $f(1)=2$ 이므로 $1+a+b=2$, 즉 $a+b=1$ 이다.

(i) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}$ 일 때:
$h(\sqrt{3})=f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})=((\sqrt{3})^3+a\sqrt{3}+b)+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=5(3\sqrt{3}+a\sqrt{3}+b)+1=5\sqrt{3}(3+a)+b=4b=1-a$ 를 대입하면,
$\sqrt{3}(3+a)+(1-a)=43\sqrt{3}+a\sqrt{3}+1-a=4a(\sqrt{3}-1)=3-3\sqrt{3}=-3(\sqrt{3}-1)a=-3$ 이고, $b=1-a=4$ 이다.
따라서 $f(x)=x^3-3x+4$ 이다.

(ii) $g(x)=-\frac{x}{\sqrt{3}}$ 일 때:
$h(\sqrt{3})=f(\sqrt{3})+g(\sqrt{3})=((\sqrt{3})^3+a\sqrt{3}+b)-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=5(3\sqrt{3}+a\sqrt{3}+b)-1=5\sqrt{3}(3+a)+b=6b=1-a$ 를 대입하면,
$\sqrt{3}(3+a)+(1-a)=6a(\sqrt{3}-1)=5-3\sqrt{3}\,a=\frac{5-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$, 이는 정수가 아니므로 문제의 의도와 거리가 멀다.

(i)에서 구한 $f(x)=x^3-3x+4$ 이므로,
$f(2)=2^3-3(2)+4=8-6+4=6$ 이다.

[정답] ③

---

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[간략 풀이]

[출제의도] 절댓값 함수의 미분가능성 조건을 통해 함수식을 추론하고, 도함수의 근 조건을 활용해 특정 함숫값의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.

[풀이]

조건 (가)에서 함수 $|g(x)|$ 가 오직 $x=1$ 에서만 미분가능하지 않으므로, 삼차함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 을 단일 실근으로, 다른 한 실근을 중근으로 가져야 한다.

$g(x)=(x-1)f(x)$ 이고 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로, $f(x)=(x-\alpha)^2$ (단, $\alpha\neq1$) 꼴이다.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-\alpha)^2$ 이다.

$g'(x)=(x-\alpha)^2+2(x-1)(x-\alpha)=(x-\alpha)\{(x-\alpha)+2(x-1)\}=(x-\alpha)(3x-\alpha-2)g'(x)=0$ 의 근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha+2}{3}$ 이다.

조건 (나)에 의해 두 근 중 적어도 하나가 닫힌 구간 $[-3,\ -1]$ 에 존재해야 한다.

⋯ 반복되는 후보 계산은 생략합니다. ⋯

$M=(-11-2)^2=(-13)^2=169$

최솟값 m 은 α 가 가장 큰 값인 $\alpha=-1$ 일 때이다.

$m=(-1-2)^2=(-3)^2=9$

따라서 $M+m=169+9=178$ 이다.

[정답] ③

---

8. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 곡선 위의 한 점에서의 접선과 수직인 직선(법선)의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $g(x)=2x^2$ 이라 하면 $g'(x)=4x$ 이므로, 점 $\mathrm{P}\,(t,\,2t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $4t$ 이다.

직선 l 은 이 접선과 수직이므로 직선 l 의 기울기는 $-\frac{1}{4t}$ 이다.

직선 l 은 점 $\mathrm{P}\,(t,\,2t^2)$ 을 지나므로, 그 방정식은 다음과 같다.

$$y-2t^2=-\frac{1}{4t}(x-t)$$

직선 l 의 y 절편 $f(t)$ 는 $x=0$ 일 때의 y 값이므로,

$$f(t)-2t^2=-\frac{1}{4t}(-t)=\frac{1}{4}f(t)=2t^2+\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\left(2t^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

[정답] ②

---

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수의 부호를 이용하여 주어진 구간에서 함수가 감소하기 위한 조건을 구하고, 이를 만족시키는 미지수의 범위를 찾을 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소하려면, 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 을 만족해야 한다.

$f'(x) = -3x^2 + 2ax - a$.

$g(x) = f'(x)$ 라 하면, $g(x)$ 는 위로 볼록한 이차함수이고 대칭축의 방정식은 $x = \frac{-2a}{2(-3)} = \frac{a}{3}$ 이다.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq 0$ 이어야 한다.

(i) 대칭축이 $x \leq 0$ 에 있을 경우, 즉 a/3 ≤ 0 ⇒ a ≤ 0x>0에서 $g(x)$ 는 감소하므로, 구간의 경계인 $g(0)$ 의 값이 0 보다 작거나 같으면 된다.

$g(0) = -a \leq 0$, 즉 $a \geq 0$ 이다.

두 조건을 동시에 만족하는 a 의 값은 $a = 0$ 뿐이다.

(ii) 대칭축이 $x > 0$ 에 있을 경우, 즉 a/3 > 0 ⇒ a > 0x>0에서 $g(x)$ 의 최댓값은 꼭짓점의 함숫값인 $g(a/3)$ 이다. 이 최댓값이 0 보다 작거나 같아야 한다.

$g(a/3) = -3(\frac{a}{3})^2 + 2a(\frac{a}{3}) - a = -\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - a = \frac{a^2}{3} - a \leq 0$.

a^2 − 3a ≤ 0 ⇒ a(a−3) ≤ 0.

따라서 $0 \leq a \leq 3$ 이다.

$a > 0$ 조건과 공통 범위를 구하면 $0 < a \leq 3$ 이다.

(i), (ii)의 결과를 종합하면 a 의 범위는 $0 \leq a \leq 3$ 이다.

따라서 실수 a 의 최댓값은 3이다.

[정답] ③

---

10. 정답 및 풀이

정답: 63

[출제의도]

도함수를 활용하여 주어진 조건을 만족하는 함수의 그래프 개형을 추론하고, 유일성 조건을 통해 특정 지점에서의 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $h(t)$ 는 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수입니다. 함수 $g(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2]$ 에서 정의되고 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ 이므로, $h(t)$ 가 오직 한 점에서만 불연속이 되려면 함수 $g(x)$ 는 이 구간에서 단조증가해야 합니다. 만약 $g(x)$ 가 극값을 가지면 불연속점이 두 개 이상 생기기 때문입니다.

$g(x)$ 를 미분하면 $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{\sqrt{4 - 2x}}$ 입니다. $\lim_{x \to 2^-} g'(x) = \infty$ 이므로 $g(x)$ 는 $x = 2$ 근방에서 증가합니다. 따라서 $g(x)$ 가 단조증가하기 위해서는 모든 $x < 2$ 에 대하여 $g'(x) \geq 0$ 이어야 합니다.

문제의 함수 $f(x)$ 가 유일하게 결정되려면, $g'(x)$ 의 최솟값이 0이 되는 경계 조건을 만족해야 합니다. $g'(x)$ 의 최솟값이 0이 되는 점의 x 좌표를 s 라 하면, $g'(s) = 0$ 이고 $g''(s) = 0$ 이어야 합니다.

(1) $g'(s) = f'(s) + \frac{1}{\sqrt{4 - 2s}} = 0 \Rightarrow f'(s) = -\frac{1}{\sqrt{4 - 2s}}$

(2) $g''(s) = f''(s) + \frac{1}{(4 - 2s)^{3/2}} = 0 \Rightarrow f''(s) = -\frac{1}{(4 - 2s)^{3/2}}$

주어진 조건 $f(0) = 2$ 를 이용하여 $s = 0$ 일 가능성을 확인합니다.

$s = 0$ 을 대입하면, $f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$ 이고, $f''(0) = -\frac{1}{4^{3/2}} = -\frac{1}{8}$ 입니다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면, $f(0) = 2$ 이므로 $c = 2$ 입니다.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 에서 $f'(0) = b = -\frac{1}{2}$ 입니다.

$f''(x) = 6x + 2a$

에서 $f''(0) = 2a = -\frac{1}{8}$, 즉 $a = -\frac{1}{16}$ 입니다.

따라서 $f(x) = x^3 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ 로 유일하게 결정됩니다. 이때 $g'(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값 0을 가지므로 문제의 모든 조건을 만족합니다.

구하는 값은 $f(4)$ 입니다.

$f(4) = 4^3 - \frac{1}{16}(4^2) - \frac{1}{2}(4) + 2 = 64 - 1 - 2 + 2 = 63$.