매쓰제닉 쪽지시험 · 고2 수학 II · 미분계수와 도함수 · 10월 2주차 정답 및 풀이

ID : WQ-2026-고2-10-02-SOL

출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
④	③	④	②	③	③	③	③	②	④

1. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 다항함수에 포함된 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

미분계수의 정의에 따라 주어진 극한값은 $f'(-1)$ 과 같다. 즉, $f'(-1)=7$ 이다.

함수 $f(x)=x^3+ax-1$ 의 도함수는 $f'(x)=3x^2+a$ 이다.

따라서 $f'(-1)=3(-1)^2+a=3+a$ 이므로, $3+a=7$ 에서 $a=4$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 특정 지점에서의 미분계수를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식 $f(2x-1)=4x^2-1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의해,

$f'(2x-1)\cdot(2x-1)'=(4x^2-1)'2f'(2x-1)=8x$

따라서 $f'(2x-1)=4x$ 입니다.

$f'(3)$ 의 값을 구하기 위해 $2x-1=3$ 을 만족시키는 x 의 값을 찾으면 $2x=4$, 즉 $x=2$ 입니다.

위 식에 $x=2$ 를 대입하면,

$f'(3)=4\times2=8$

[정답] ③

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 함수의 극한값이 $\frac{0}{0}$ 꼴일 때, 인수분해를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$x\to1$ 일 때 (분모) $\to0$ 이고, 분자 역시 $f(1)-3=(1^2+2\cdot1)-3=0$ 으로 수렴하므로 주어진 식은 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한이다.

$f(x)-3=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ 으로 인수분해된다.

따라서,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)=1+3=4$$

이다.

[정답] ④

4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도]

다항함수의 도함수를 구하고, 주어진 미분계수 값을 이용하여 함수의 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 함수 $f(x)=x^3+ax^2+1$ 의 도함수는 $f'(x)=3x^2+2ax$ 이다.

문제의 조건에서 $f'(1)=7$ 이므로, 도함수에 $x=1$ 을 대입하면 $f'(1)=3(1)^2+2a(1)=3+2a$ 이다.

따라서 $3+2a=7$ 이므로 $2a=4$ 에서 $a=2$ 를 얻는다.

---

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

로그함수의 도함수를 이용하여 특정 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[풀이]

주어진 곡선 $y=\ln(3x-2)$ 가 x 축과 만나는 점의 y 좌표는 0 이므로, $\ln(3x-2)=0$ 입니다.

로그의 정의에 의해 $3x-2=e^0=1$ 이므로, $3x=3$ 에서 $x=1$ 을 얻습니다.

따라서 접점의 좌표는 $(1,0)$ 입니다.

함수 $y=\ln(3x-2)$ 를 x 에 대하여 미분하면 $y'=\frac{3}{3x-2}$ 입니다.

따라서 점 $(1,0)$ 에서의 접선의 기울기는 $x=1$ 에서의 미분계수와 같으므로, 그 값은 $\frac{3}{3(1)-2}=3$ 입니다.

---

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 이를 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.

[풀이]

미분계수의 정의에 따라 주어진 극한값은 $f'(1)$ 과 같으므로 $f'(1)=10$ 이다.

함수 $f(x)=2x^3+ax-4$ 의 도함수는 $f'(x)=6x^2+a$ 이다.

따라서 $f'(1)=6(1)^2+a=6+a$ 이고, $6+a=10$ 이므로 구하는 상수 a 의 값은 4 이다.

---

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

도함수가 주어진 함수의 부정적분을 구하고, 주어진 함숫값을 이용하여 적분상수를 결정할 수 있다.

[풀이]

$$f(x)+g(x)=\int(4x-3)dx=2x^2-3x+C$$

(단, C 는 적분상수)

주어진 조건에서 $f(0)+g(0)=5$ 이므로, $x=0$ 을 대입하면

$f(0)+g(0)=2(0)^2-3(0)+C=C=5$

따라서 $f(x)+g(x)=2x^2-3x+5$ 이다.

구하고자 하는 값은 $f(2)+g(2)$ 이므로, 위 식에 $x=2$ 를 대입하면

$f(2)+g(2)=2(2)^2-3(2)+5=8-6+5=7$

이다.

---

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 다항함수를 추론하고, 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2-1}=1$$

에서 $f(x)$ 는 이차함수이고 최고차항의 계수가 2 임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=2x^2+ax+b$ 로 놓을 수 있다.

조건

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$$

에서 $x\to 2$ 일 때 (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$ 이다.

$f(2)=2(2^2)+2a+b=8+2a+b=0$ 이므로 $b=-2a-8$ 이다.

$f(x)=2x^2+ax-2a-8=2(x^2-4)+a(x-2)=(x-2)(2x+4+a)$ 이다.

이를 극한식에 대입하면,

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+4+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+4+a)=4+4+a=8+a$$

이다.

이 극한값이 5 이므로 $8+a=5$ 에서 $a=-3$ 이다.

$a=-3$ 을 $b=-2a-8$ 에 대입하면 $b=-2(-3)-8=6-8=-2$ 이다.

따라서 $f(x)=2x^2-3x-2$ 이다.

구하는 값은 $f(1)=2(1)^2-3(1)-2=2-3-2=-3$ 이다.

---

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도]

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 다항함수의 식을 구하고 함숫값을 계산할 수 있다.

[풀이]

조건 (가)에서 $x\to\infty$ 일 때 극한값이 2 로 수렴하므로, 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 $3\times 2=6$ 인 이차함수임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=6x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x\to 1$ 일 때 분모가 $x^2-1\to 0$ 으로 수렴하고 극한값이 존재하므로, 분자도 $f(x)\to 0$ 으로 수렴해야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$ 이다.

$f(1)=6(1)^2+a(1)+b=6+a+b=0$ 에서 $b=-a-6$ 이다.

따라서 $f(x)=6x^2+ax-(a+6)=(x-1)(6x+a+6)$ 이다.

이를 조건 (나)의 식에 대입하면,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(6x+a+6)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(6x+a+6)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+a+6}{x+1}=\frac{6+a+6}{2}=\frac{a+12}{2}$$

이 극한값이 -3 이므로, $\frac{a+12}{2} = -3$ 에서 $a+12=-6$, 즉 $a=-18$ 이다.

$a=-18$ 을 $b=-a-6$ 에 대입하면 $b=-(-18)-6=12$ 이다.

그러므로 $f(x)=6x^2-18x+12$ 이다.

따라서 $f(2)=6(2)^2-18(2)+12=24-36+12=0$ 이다.

---

10. 정답 및 풀이

정답: ④

[간략 풀이]

[출제의도]

함수의 극한과 역함수의 성질을 이용하여 함수를 결정하고, 역함수와 정적분의 관계를 이용하여 그 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

(가)에서 $\lim_{x\to 0} x=0$ 이므로 극한값이 존재하기 위해 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ 이어야 한다.

$f(0)=a+b+c=0$

또한, 극한값은 미분계수의 정의에 의해 $f'(0)=6$ 이다.

$f'(x)=2ae^{2x}+be^x$ 이므로 $f'(0)=2a+b=6$ 이다.

… 반복되는 후보 계산은 생략합니다. …

$$\int_0^{\ln 2} (e^{2x}+4e^x-5)dx = [\tfrac{1}{2}e^{2x}+4e^x-5x]_0^{\ln 2}$$

$$= (\tfrac{1}{2}e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}-5\ln 2)-(\tfrac{1}{2}e^0+4e^0-0)$$
$$= (\tfrac{1}{2}\cdot 4+4\cdot 2-5\ln 2)-(\tfrac{1}{2}+4)$$
$$= (10-5\ln 2)-\tfrac{9}{2} = \tfrac{11}{2}-5\ln 2$$

따라서

$$\int_0^7 g(x)dx = 7\ln 2-(\tfrac{11}{2}-5\ln 2) = 12\ln 2-\tfrac{11}{2}$$

이다.
