MathGenix 2026년 고1 10월 모의고사 대비 시험 03 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2610-03-SOL 출제 : MathGenix

본 자료의 저작권은 MathGenix에 있습니다. 무단 복제·배포·재가공 금지 | https://mathgenix.net

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
②	④	④	④	③	④	③	①	③	③

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	①	③	②	③	③	③	③	②	④

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	11	14	6	11	40	16	④	65	7

---

1. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 다항식의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 이용하여 등식을 만족시키는 다항식을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건은 $P=x^2+2x-3$, $Q=3x^2+x+1$ 이고, 이 다항식들은 $A+2P=Q$ 를 만족시킨다.

등식 $A+2P=Q$ 를 A 에 대하여 정리하면 $A=Q-2P$ 이다. 먼저 다항식 P 에 2를 곱하면 $2P=2(x^2+2x-3)=2x^2+4x-6$ 이다.

따라서 다항식 A 는 $A=(3x^2+x+1)-(2x^2+4x-6)=3x^2+x+1-2x^2-4x+6=x^2-3x+7$ 이다.

---

2. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 좌표평면에서 선분의 내분점을 구하고, 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

두 점 $\mathrm{A}(-4,1)$, $\mathrm{B}(5,-2)$ 를 잇는 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점 P 의 좌표를 (x,y) 라 하면 다음과 같다.

$x=\frac{2\times5+1\times(-4)}{2+1}=\frac{10-4}{3}=2$

$y=\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}=\frac{-4+1}{3}=-1$

따라서 점 P 의 좌표는 $(2,-1)$ 이다.

원점 $\mathrm{O}(0,0)$ 과 점 $\mathrm{P}(2,-1)$ 사이의 거리는 두 점 사이의 거리 공식을 이용하면 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

그러므로 원점 O 와 점 P 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이다.

---

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이차방정식의 근의 정의와 근과 계수의 관계를 함께 이용하여 주어진 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이] 이차방정식 $x^2-4x+1=0$ 의 두 근이 α,β 이므로 근의 정의에 따라 $\alpha^2-4\alpha+1=0$, $\beta^2-4\beta+1=0$ 이 성립한다. 즉, $\alpha^2-4\alpha=-1$ 이고 $\beta^2-4\beta=-1$ 이다.

주어진 식의 분모를 간단히 하면 $\frac{\beta}{(-1)+3}+\frac{\alpha}{(-1)+3}=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 $\alpha+\beta=-\left(\frac{-4}{1}\right)=4$ 이므로, 구하는 식의 값은 $\frac{4}{2}=2$ 이다.

---

4. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 포물선의 방정식을 표준형으로 변환하여 꼭짓점의 좌표를 구하고, 평행이동의 조건을 이용하여 미지수의 값을 구한 후 도형의 성질을 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이] 포물선 $y=x^2+2x-1$ 을 표준형으로 바꾸면 $y=(x+1)^2-2$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -2)$ 이다. 이 포물선을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $a+3$ 만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표는 $(-1+a,\ -2+a+3)$, 즉 $(-1+a, a+1)$ 이 된다. 이동된 포물선의 꼭짓점이 x 축 위에 있으려면 y 좌표가 0이어야 하므로, $a+1=0$ 에서 $a=-1$ 이다. 따라서 이동된 포물선의 꼭짓점은 $(-2, 0)$ 이고, 최고차항의 계수가 1이므로 그 방정식은 $y=(x+2)^2=x^2+4x+4$ 이다. 이 포물선의 y 절편은 $x=0$ 일 때의 y 값이므로 4이다.

---

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원의 방정식을 이용하여 평행이동을 이해하고, 이를 점의 이동에 적용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원 $C_1 : (x-1)^2+y^2=4$ 의 중심은 점 $(1, 0)$ 이고, 원 $C_2 : (x+2)^2+(y-a)^2=4$ 의 중심은 점 $(-2, a)$ 이다. 주어진 평행이동은 원 C_1 의 중심을 원 C_2 의 중심으로 옮기는 것이므로, x 축 방향으로 $-2-1=-3$ 만큼, y 축 방향으로 $a-0=a$ 만큼의 평행이동이다.

이 평행이동에 의하여 점 $(b, 5)$ 가 점 $(1, 3)$ 으로 옮겨지므로, x 좌표에 대하여 $b+(-3)=1$ 이고, y 좌표에 대하여 $5+a=3$ 이다. $b-3=1$ 에서 $b=4$ 를 얻고, $5+a=3$ 에서 $a=-2$ 를 얻는다.

따라서 $a+b=-2+4=2$ 이다.

---

6. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 다항식의 전개식에서 특정 항의 계수를 구하고, 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

다항식 $(2x+ay-a)^2$ 의 전개식에서 x 항은 $2\cdot(2x)\cdot(-a)=-4ax$ 이고, y 항은 $2\cdot(ay)\cdot(-a)=-2a^2y$ 이다.

따라서 x 의 계수는 $-4a$ 이고 y 의 계수는 $-2a^2$ 이다. 문제의 조건에 따라 두 계수가 같으므로 $-4a=-2a^2$ 이다.

이 식을 정리하면 $2a^2-4a=0$, 즉 $2a(a-2)=0$ 이다. a 는 0 이 아닌 상수이므로 $a=2$ 이다.

---

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지정리를 이용하여 나머지를 구하고, 그 나머지에 특정 값을 대입한 결과를 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이] 다항식 $P(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 나머지가 $x+5$ 이므로, 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $P(x)=(x^2-4)Q(x)+x+5$ 이다.

나머지정리에 의해 $P(2)=2+5=7$ 이고 $P(-2)=-2+5=3$ 이다. 다음으로, 다항식 $(x+1)P(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)=ax+b$ 라 하자. $(x+1)P(x)=(x^2-4)Q'(x)+ax+b$ 로 놓을 수 있다. 이 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $(2+1)P(2)=2a+b$ 이므로, $3\times 7=2a+b$ 에서 $2a+b=21$ 이다. 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $(-2+1)P(-2)=-2a+b$ 이므로, $(-1)\times 3=-2a+b$ 에서 $-2a+b=-3$ 이다. 두 식 $2a+b=21$ 과 $-2a+b=-3$ 을 연립하여 풀면 $a=6, b=9$ 이므로, $R(x)=6x+9$ 이다. 따라서 $R(-1)=6(-1)+9=3$ 이다.

MathGenix 2026년 11월 10월 모의고사

8. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식을 풀고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

[풀이] 주어진 연립방정식에서 $y=1-x$ 를 $x^2+y^2=13$ 에 대입하면 $x^2+(1-x)^2=13$ 이다. 이 식을 정리하면 $x^2+1-2x+x^2=13$, 즉 $2x^2-2x-12=0$ 이므로 $x^2-x-6=0$ 이다. 이 이차방정식의 두 근이 x_1, x_2 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=-6$ 이다. 또한, $y_1=1-x_1$ 이고 $y_2=1-x_2$ 이므로 $y_1y_2=(1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2=1-1+(-6)=-6$ 이다. 따라서 구하는 값은 $x_1x_2+y_1y_2=-6+(-6)=-12$ 이다.

---

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 좌표평면에서 두 선분의 수직 조건을 이용하여 직선 위의 점의 좌표를 구하고, 두 점 사이의 거리를 계산하는 문제입니다.

[풀이]

점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 좌표를 (a, a) 로 놓을 수 있습니다. 문제의 조건에서 점 P는 원점이 아니므로 $a \neq 0$ 입니다.

선분 OP와 선분 AP가 서로 수직이므로 두 선분의 기울기의 곱은 -1 입니다. 선분 OP의 기울기는 $\frac{a-0}{a-0}=1$ 입니다. 선분 AP의 기울기는 $\frac{a-1}{a-5}$ 입니다. (단, $a \neq 5$)

두 기울기의 곱이 -1 이므로 $1 \times \frac{a-1}{a-5}=-1$ 에서 $a-1=-(a-5)$, 즉 $a-1=-a+5$ 입니다. 이 식을 정리하면 $2a=6$ 이므로 $a=3$ 입니다. 따라서 점 P의 좌표는 $(3,3)$ 입니다.

구하는 값은 선분 OP의 길이의 제곱이므로 $OP^2=3^2+3^2=9+9=18$ 입니다.

[3점]

---

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 직선과 원의 위치 관계를 이해하고 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 특정 조건을 만족하는 원의 중심 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원 C 의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+1)$ 로 놓을 수 있다. 원 C 의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

원이 직선 $2x-y+3=0$ 에 접하므로, 원의 중심 $(a, a+1)$ 과 직선 $2x-y+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면 $\frac{|2a-(a+1)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a+2|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 이다. 이 식을 정리하면 $|a+2|=10$ 이므로, $a+2=10$ 또는 $a+2=-10$ 이다. 따라서 $a=8$ 또는 $a=-12$ 이다.

모든 가능한 a 의 값의 곱은 $8 \times (-12)=-96$ 이다.

---

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 범위를 구하고, 그 범위에 속하는 정수의 개수를 셀 수 있다.

[풀이] 점 $(2,1)$ 과 직선 $x-2y+4=0$ 사이의 거리 d_1 은 $d_1=\frac{|2-2(1)+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이다.

점 $(2,1)$ 과 직선 $2x+y-k=0$ 사이의 거리 d_2 는 $d_2=\frac{|2(2)+1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|5-k|}{\sqrt{5}}$ 이다.

주어진 조건 $d_1 \geq d_2$ 에 따라 부등식을 세우면 $\frac{4}{\sqrt{5}} \geq \frac{|5-k|}{\sqrt{5}}$ 이므로 $|k-5| \leq 4$ 이다.

이 부등식을 풀면 $-4 \leq k-5 \leq 4$ 이므로, $1 \leq k \leq 9$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 는 $1, 2, \cdots, 9$ 로 총 9개이다.

MathGenix 2026년 고1 10월 모의고사

12. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 점의 대칭이동을 이용하여 두 선분의 길이의 합의 최솟값을 구하고, 삼각형의 무게중심 좌표 공식을 이용하여 미지점의 좌표를 구해 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 $A(-2,1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(2,1)$ 이다. $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최소일 때는 점 P 가 선분 $A'B$ 위에 있을 때이므로, 점 P_0 는 직선 $A'B$ 와 y 축의 교점이다. 두 점 $A'(2,1)$, $B(4,4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{4-1}{4-2}(x-2)$ 이므로 $y=\frac{3}{2}x-2$ 이다. 이 직선의 y 절편은 -2 이므로 P_0 의 좌표는 $(0,\ -2)$ 이다.

점 C 의 좌표를 (x,y) 라 하자. 삼각형 CP_0B 의 무게중심의 좌표가 $(1,1)$ 이므로 무게중심 공식에 의해 $\frac{x+0+4}{3}=1$, $\frac{y-2+4}{3}=1$ 이다. 따라서 $x+4=3$ 에서 $x=-1$ 이고, $y+2=3$ 에서 $y=1$ 이므로 점 C 의 좌표는 $(-1,1)$ 이다.

두 점 $A(-2,1)$ 과 $C(-1,1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{\{-1-(-2)\}^2+(1-1)^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1$ 이다.

---

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미지수를 포함한 연립이차부등식의 해를 구하고, 정수 해의 개수 조건을 만족하는 미지수의 값을 찾을 수 있다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2-(n^2+n)x+n^3\geq 0$ 을 인수분해하면 $(x-n)(x-n^2)\geq 0$ 이다. 자연수 n 에 대해 $n\leq n^2$ 이므로 해는 $x\leq n$ 또는 $x\geq n^2$ 이다.

두 번째 부등식 $x^2-(3n+4)x+12n<0$ 을 인수분해하면 $(x-4)(x-3n)<0$ 이다.

$n=1$ 일 때 두 번째 부등식의 해는 $3<x<4$ 이므로 정수 해는 존재하지 않는다.

$n\geq 2$ 일 때 $3n>4$ 이므로 두 번째 부등식의 해는 $4<x<3n$ 이다.

연립부등식의 정수 해는 $4<x<3n$ 을 만족하는 정수 중에서 $x\leq n$ 또는 $x\geq n^2$ 을 만족하는 것이다.

$n\geq 3$ 일 때 $n^2-(3n-1)=n^2-3n+1>0$ 이므로 $n^2>3n-1$ 이다. 따라서 $x\geq n^2$ 과 $4<x<3n$ 을 동시에 만족하는 정수는 없다.

$n=2$ 일 때 $4<x<6$ 과 ($x\leq 2$ 또는 $x\geq 4$)의 공통 정수 해는 $x=5$ 로 1개이다.

$n=3,4$ 일 때는 공통 정수 해가 없다.

$n\geq 5$ 일 때, $4<x<3n$ 범위에서 $x\leq n$ 을 만족하는 정수 해는 $5,6,\ \ldots,n$ 이다.

이때 정수 해의 개수는 $n-5+1=n-4$ 개이다.

문제의 조건에서 정수 해의 개수가 13이므로 $n-4=13$ 이다. 따라서 $n=17$ 이다. 이 값은 $n\geq 5$ 조건을 만족한다.

그러므로 구하는 자연수 n 의 값은 17이다.

---

14. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 직선 위의 두 점 사이의 거리가 일정할 때, 대칭이동과 평행이동을 이용하여 두 선분 길이의 합의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 A $(1,4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 A'의 좌표는 $(4,1)$ 이다. $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로 $\overline{AP}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{QB}$ 이다.

점 P, Q는 직선 $y=x$ 위에 있고, 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표보다 작으므로 P의 좌표를 (p,p) 라 하면 $\overline{PQ}=\sqrt{2}$ 이므로 Q의 좌표는 $(p+1,p+1)$ 이다. 점 B $(5,6)$ 을 x축의 방향으로 -1 만큼, y축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 점을 B'이라 하면 B'의 좌표는 $(4,5)$ 이다. 이때 $\overline{QB}=\overline{PB'}$ 이 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 $\overline{A'P}+\overline{PB'}$ 의 최솟값과 같고, 이는 세 점 A', P, B'이 한 직선 위에 있을 때 선분 A'B'의 길이와 같다. 그러므로 최솟값은 $\overline{A'B'}=\sqrt{(4-4)^2+(5-1)^2}=\sqrt{0^2+4^2}=4$ 이다.

MathGenix 2026년 고1 10월 모의고사

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 행렬의 곱셈에 대한 성질과 주어진 조건을 이용하여 행렬의 성분을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

행렬 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 라 하자.

조건 (가)에서 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8b_{21} & 8b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$ 이므로 $b_{21}=0, b_{22}=0$ 이다. 따라서 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

같은 조건에서 $CA=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8c_{11} \\ 0 & 8c_{21} \end{pmatrix}=O$ 이므로 $c_{11}=0, c_{21}=0$ 이다. 따라서 $C=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}$ 이다.

조건 (나)에서 행렬 B 의 제1열 성분의 합은 $b_{11}+b_{21}=b_{11}+0=3$ 이므로 $b_{11}=3$ 이다. 제1행 성분의 합은 $b_{11}+b_{12}=3+b_{12}=5$ 이므로 $b_{12}=2$ 이다.

따라서 문제에서 요구하는 행렬 B 의 $(1,1)$ 성분에서 $(1,2)$ 성분을 뺀 값은 $b_{11}-b_{12}=3-2=1$ 이다.

참고로 조건 (다)를 이용하면 $c_{11}+c_{22}=0+c_{22}=-2$ 이므로 $c_{22}=-2$ 이고, $BC=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3c_{12}-4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$ 에서 $3c_{12}-4=8$ 이므로 $c_{12}=4$ 가 되어 모든 조건을 만족시킨다.

---

16. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 조합을 이용하여 특정 조건을 만족하는 대상을 선택하고, 이웃하지 않는 순열의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

선발되는 6명의 인원 구성을 기준으로 경우를 나눈다.

(i) 선배 4명, 후배 2명을 선발하는 경우:

3명의 후배 중 선발될 2명을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$ 이다.

양 끝에 설 선배 2명을 4명 중 골라 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$ 이다.

가운데 4자리에 남은 선배 2명과 후배 2명을 배열할 때, 후배가 이웃하지 않는 경우의 수는 전체 $4!$ 에서 후배가 이웃하는 경우($3!\times 2!$)를 뺀 $24-12=12$ 이다.

따라서 이 경우의 수는 $3\times 12\times 12=432$ 이다.

(ii) 선배 3명, 후배 3명을 선발하는 경우:

양 끝에 선배 2명을 세우면 가운데 4자리에 남은 선배 1명과 후배 3명을 배열해야 한다.

4개의 자리에 3명이 서로 이웃하지 않게 서는 것은 불가능하므로 이 경우의 수는 0이다.

따라서 구하는 총 경우의 수는 $432+0=432$ 이다.

---

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값을 구하고, 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 찾을 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 이차함수 $f(x)$ 를 표준형으로 바꾸면 $f(x)=x^2-10x+20=(x-5)^2-5$ 이다. 이 함수는 아래로 볼록하고 대칭축이 $x=5$ 인 포물선이다.

닫힌구간 $[k-2,k+2]$ 에서 이차함수 $f(x)$ 의 최댓값은 구간의 양 끝점에서의 함숫값인 $f(k-2)$ 와 $f(k+2)$ 중 크거나 같은 값이다.

최댓값이 4이므로, $\max\{f(k-2),f(k+2)\}=4$ 이다.

이는 $f(k-2)\le 4$ 이고 $f(k+2)\le 4$ 이며, 둘 중 적어도 하나의 값은 4임을 의미한다.

먼저 $f(x)=4$ 가 되는 x 의 값을 구하면 $x^2-10x+20=4$, 즉 $x^2-10x+16=0$ 이다. 이 이차방정식을 풀면 $(x-2)(x-8)=0$ 이므로 $x=2$ 또는 $x=8$ 이다.

따라서 구간의 양 끝점 $k-2$ 또는 $k+2$ 가 2 또는 8이어야 한다.

(i) $k-2=2$ 일 때, $k=4$ 이다. 이때 구간은 $[2,6]$ 이고, $f(2)=4, f(6)=-4$ 이므로 최댓값은 4 이다. 따라서 $k=4$ 는 조건을 만족한다.

(ii) $k+2=8$ 일 때, $k=6$ 이다. 이때 구간은 $[4,8]$ 이고, $f(4)=-4, f(8)=4$ 이므로 최댓값은 4 이다. 따라서 $k=6$ 은 조건을 만족한다.

MathGenix 2026년 11 10월 모의고사

(iii) $k+2=2$ 일 때, $k=0$ 이다. 이때 구간은 $[-2,2]$ 이고, 대칭축 $x=5$ 가 구간의 오른쪽에 있으므로 함수는 감소한다. 최댓값은 $f(-2)=44\neq 4$ 이다.
(iv) $k-2=8$ 일 때, $k=10$ 이다. 이때 구간은 $[8,12]$ 이고, 대칭축 $x=5$ 가 구간의 왼쪽에 있으므로 함수는 증가한다. 최댓값은 $f(12)=44\neq 4$ 이다.
따라서 조건을 만족하는 모든 실수 k 의 값은 $4, 6$ 이므로 그 합은 $4+6=10$ 이다.

---

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항식을 구하고 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가한다.
[풀이]
다항식 $f(x)+g(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 상수이다. 문제의 조건에 따라 이 나머지가 $R(x)=3x^2+3x-f(x)$ 와 같으므로, $R(x)$ 는 상수이다. $R(x)=k$ 라 하면 $f(x)=3x^2+3x-k$ 로 놓을 수 있다.

$f(x)+g(x)$ 를 x^2+x-1 로 나누었을 때의 나머지도 k 이므로, 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $f(x)+g(x)=(x^2+x-1)Q(x)+k$ 이다.
$g(x)=(x^2+x-1)Q(x)-f(x)+k$ 에 $f(x)=3x^2+3x-k$ 를 대입하면,
$g(x)=(x^2+x-1)Q(x)-(3x^2+3x-k)+k=(x^2+x-1)Q(x)-3x^2-3x+2k$ 이다. $g(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로, $Q(x)$ 는 $x+a$ 형태의 일차식이어야 한다.
$g(x)=(x^2+x-1)(x+a)-3x^2-3x+2k=x^3+(a-2)x^2+(a-4)x-a+2k$ 이다. 나머지정리에 의해 $f(1)+g(1)=R(1)=k$ 이고, $f(1)=3+3-k=6-k$ 이므로 $g(1)=k-f(1)=k-(6-k)=2k-6$ 이다. $g(x)$ 의 식에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=1+(a-2)+(a-4)-a+2k=a-5+2k$ 이다. 따라서 $2k-6=a-5+2k$ 이므로 $a=-1$ 이다. 그러므로 $g(x)=x^3-3x^2-5x+1+2k$ 이다.

조건 $g(2)=-9$ 를 이용하면, $g(2)=8-3(4)-5(2)+1+2k=8-12-10+1+2k=-13+2k=-9$ 이다. 이를 풀면 $2k=4$, 즉 $k=2$ 이다. 따라서 $f(x)=3x^2+3x-2$ 이고 $g(x)=x^3-3x^2-5x+5$ 이다. 구하는 값은 $f(2)+g(0)=(3\cdot 2^2+3\cdot 2-2)+5=(12+6-2)+5=16+5=21$ 이다.

---

19. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 이차함수의 접선의 성질과 두 점을 지름으로 하는 원의 성질을 통합적으로 이용하여 원의 중심 좌표를 구하는 능력을 평가한다.
[풀이]
$f(x)=2x-x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2-2x$ 이다. 곡선 위의 점 A $(a, 2a-a^2)$ 에서의 접선의 방정식은 $y-(2a-a^2)=(2-2a)(x-a)$ 이고, 정리하면 $y=(2-2a)x+a^2$ 이다. 마찬가지로 점 B $(b, 2b-b^2)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=(2-2b)x+b^2$ 이다. 두 접선이 y축 위의 한 점에서 만나므로 두 접선의 y절편이 같다. 따라서 $a^2=b^2$ 이고, 두 점 A, B는 서로 다른 점이므로 $a\neq b$ 이므로 $a+b=0$ 이다.

직선 AB의 기울기 m 은 $m=\frac{(2b-b^2)-(2a-a^2)}{b-a}=\frac{2(b-a)-(b^2-a^2)}{b-a}=2-(a+b)$ 이다. $a+b=0$ 이므로 $m=2$ 이다. 원 C 의 지름인 선분 AB의 길이는 $2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ 이므로 $AB^2=(4\sqrt{5})^2=80$ 이다. $AB^2=(b-a)^2+\{m(b-a)\}^2=(b-a)^2(1+m^2)$ 이므로, $80=(b-a)^2(1+2^2)=5(b-a)^2$ 이다. 따라서 $(b-a)^2=16$ 이므로 $|b-a|=4$ 이다. 연립방정식 $a+b=0, |b-a|=4$ 를 풀면 $\{a,b\}=\{-2,2\}$ 이다.

원 C 의 중심은 선분 AB의 중점이므로 중심의 y좌표는 $\frac{(2a-a^2)+(2b-b^2)}{2}=\frac{2(a+b)-(a^2+b^2)}{2}$ 이다. $a=-2, b=2$ 를 대입하면 중심의 y좌표는 $\frac{2(0)-((-2)^2+2^2)}{2}=\frac{-8}{2}=-4$ 이다.

---

20. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이등변삼각형의 성질, 삼각형의 넓이, 외심의 정의를 종합적으로 이용하여 외심의 좌표를 구한다.

[풀이] 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고 M(3, 2)가 선분 BC의 중점이므로, 선분 AM은 선분 BC의 수직이등분선이다. 점 A(3, 8)이므로 삼각형의 높이인 선분 AM의 길이는 $\overline{AM}=|8-2|=6$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}=24$ 에서 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times 6=24$ 이므로 밑변의 길이 $\overline{BC}=8$ 이다. 직선 AM이 직선 $x=3$ 이므로, 직선 BC의 방정식은 $y=2$ 이다. 점 M(3, 2)가 선분 BC의 중점이므로, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(3-4,2)$, $(3+4,2)$ 즉, B $(-1,2)$ 와 C $(7,2)$ 이다. 삼각형 ABC의 외심은 선분 BC의 수직이등분선인 직선 $x=3$ 위에 있으므로 외심의 좌표를 O $(3,y)$ 라 할 수 있다. 외심의 정의에 따라 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$ 이므로 $(3-3)^2+(y-8)^2=(3-7)^2+(y-2)^2$ 이다. 이 식을 정리하면 $(y-8)^2=(-4)^2+(y-2)^2$ 이고, $y^2-16y+64=16+y^2-4y+4$ 에서 $12y=44$ 이므로 $y=\frac{44}{12}=\frac{11}{3}$ 이다. 따라서 삼각형 ABC의 외심의 y좌표는 $\frac{11}{3}$ 이다.

---

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 여러 제약 조건하에서 경우의 수를 구하기 위해 각 조건이 의미하는 바를 해석하고 이를 종합하여 해결하는 능력을 평가한다.

[풀이]

5일 동안 매일 2개의 프로그램을 운영하므로, 운영되는 프로그램의 총 횟수는 $5\times 2=10$ 이다. 프로그램 A, B, C, D가 운영되는 횟수를 각각 n_A, n_B, n_C, n_D 라 하면 $n_A+n_B+n_C+n_D=10$ 이다. 조건 (가)에서 n_A, n_B, n_C, n_D 는 모두 다른 자연수이므로, 가능한 값의 조합은 $\{1,2,3,4\}$ 뿐이다.

두 프로그램 X, Y가 함께 운영되는 횟수를 k_{XY} 라 하자. 조건 (나)에서 프로그램 A는 C가 운영되는 날에만 운영되므로, A가 운영될 때는 항상 C와 함께 쌍으로 운영되어야 한다. 따라서 $k_{AB}=0, k_{AD}=0$ 이고 $n_A=k_{AC}$ 이다. 조건 (다)에서 $k_{BD}=2$ 이다.

5일 동안 운영되는 5개의 프로그램 쌍은 $\{A,C\}, \{B,C\}, \{C,D\}, \{B,D\}$ 네 종류로만 구성된다. 총 5개의 쌍이므로 $k_{AC}+k_{BC}+k_{CD}+k_{BD}=5$ 이고, $k_{BD}=2$ 이므로 $k_{AC}+k_{BC}+k_{CD}=3$ 이다. 각 프로그램의 운영 횟수는 다음과 같다.

$n_A=k_{AC}$

$n_B=k_{BC}+k_{BD}=k_{BC}+2$

$n_C=k_{AC}+k_{BC}+k_{CD}=3$

$n_D=k_{CD}+k_{BD}=k_{CD}+2$

$n_C=3$ 이므로, $\{n_A,n_B,n_D\}=\{1,2,4\}$ 이다. $k_{BC}\geq 0$, $k_{CD}\geq 0$ 이므로 $n_B\geq 2, n_D\geq 2$ 이다. 따라서 $n_A=1$ 이어야 하고, $k_{AC}=1$ 이다. $\{n_B,n_D\}=\{2,4\}$ 이므로 다음 두 가지 경우가 가능하다.

(i) $n_B=2, n_D=4$ 인 경우: $k_{BC}=0, k_{CD}=2$ 이다. 이때 $k_{AC}+k_{BC}+k_{CD}=1+0+2=3$ 이므로 조건을 만족한다. 운영되는 프로그램 쌍은 $\{A,C\}$ 1개, $\{C,D\}$ 2개, $\{B,D\}$ 2개이다. 5일간 이 쌍들을 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{1!\,2!\,2!}=30$ 이다.

(ii) $n_B=4, n_D=2$ 인 경우: $k_{BC}=2, k_{CD}=0$ 이다. 이때 $k_{AC}+k_{BC}+k_{CD}=1+2+0=3$ 이므로 조건을 만족한다. 운영되는 프로그램 쌍은 $\{A,C\}$ 1개, $\{B,C\}$ 2개, $\{B,D\}$ 2개이다. 5일간 이 쌍들을 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{1!\,2!\,2!}=30$ 이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $30+30=60$ 이다.

---

22. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 두 점을 지나는 직선과 수직인 직선의 기울기 관계를 이용하여 특정 조건을 만족하는 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 두 점 $(1,-1)$, $(3,5)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{5-(-1)}{3-1}=3$ 이다. 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다. 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 점 $(a,-2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-(-2)=-\frac{1}{3}(x-a)$ 이다. 이 직선의 x 절편을 구하기 위해 $y=0$ 을 대입하면 $2=-\frac{1}{3}(x-a)$ 이므로, $x-a=-6$, 즉 $x=a-6$ 이다. 문제에서 x 절편이 5 라고 하였으므로 $a-6=5$ 이다. 따라서 $a=11$ 이다.

MathGenix 2026년 고1 10월 모의고사

23. 정답 및 풀이

정답: 14

[출제의도] 순열과 조합의 정의를 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 자연수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식의 조합 $_{n+1}C_3$ 이 정의되려면 자연수 n 은 $n+1 \geq 3$, 즉 $n \geq 2$ 를 만족해야 한다.

순열과 조합의 정의에 따라 등식을 전개하면 $2 \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times n(n-1)$ 이다.

$n \geq 2$ 이므로 $n(n-1) \neq 0$ 이다. 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면 $\frac{2(n+1)}{6} = 5$, 즉 $\frac{n+1}{3} = 5$ 이다.

따라서 $n+1 = 15$ 이므로 구하는 자연수 n 의 값은 14 이다.

---

24. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 인수분해를 이용하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식을 효율적으로 풀 수 있는지 평가한다.

[풀이]

주어진 연립방정식은 다음과 같다.

$x + y = 5$ …①

$2x^2 + 3xy + y^2 = 35$ …②

식 ②의 좌변을 인수분해하면 $(2x + y)(x + y) = 35$ 이다.

위 식에 식 ①을 대입하면 $(2x + y) \times 5 = 35$ 이므로, $2x + y = 7$ …③ 이다.

식 ③에서 식 ①을 변끼리 빼면 $(2x + y) - (x + y) = 7 - 5$ 이므로 $x = 2$ 이다. 이 값을 식 ①에 대입하면 $2 + y = 5$ 이므로 $y = 3$ 이다.

따라서 연립방정식의 해는 $\alpha = 2, \beta = 3$ 이므로, 구하는 값은 $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$ 이다.

---

25. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 공통부분이 있는 다항식을 치환하여 완전제곱식이 될 조건을 이용하여 미정계수와 다항식의 특정 항을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$P(x) = (x^2 - 3x + 5)(x^2 - 3x - 1) + k$ 에서 공통부분인 $x^2 - 3x = t$ 로 치환하면 $P(x) = (t+5)(t-1) + k = t^2 + 4t - 5 + k$ 이다.

$P(x)$ 가 이차식 $Q(x)$ 의 완전제곱식이 되려면, t 에 대한 이차식 $t^2 + 4t - 5 + k$ 또한 완전제곱식이 되어야 한다.

$t^2 + 4t - 5 + k = (t+2)^2 = t^2 + 4t + 4$ 이므로, 상수항을 비교하면 $-5 + k = 4$ 에서 $k = 9$ 이다.

$k = 9$ 일 때 $P(x) = (x^2 - 3x + 2)^2$ 이고, $Q(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ 이다. $Q(x)$ 의 상수항은 2이므로 구하는 값은 k 와 $Q(x)$ 의 상수항의 합인 $9 + 2 = 11$ 이다.

---

26. 정답 및 풀이

정답: 40

[출제의도] 치환을 이용해 사차방정식을 변형하고, 이차함수의 최솟값을 이용하여 주어진 실근의 개수 조건을 만족시키는 미지수의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 방정식에서 $x^2 - 3x = t$ 로 치환하면 $t^2 - 2t = k + 4$, 즉 $t^2 - 2t - (k+4) = 0$ 이다.

t 에 대한 이차방정식의 근을 구하면 $t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-k-4)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + k + 4} = 1 \pm \sqrt{k+5}$ 이다.

한편, 방정식 $x^2 - 3x = t$ 가 실근을 가지려면, 이차함수 $f(x) = x^2 - 3x = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$ 의 최솟값이 $-\frac{9}{4}$ 이므로 $t \geq -\frac{9}{4}$ 이어야 한다.

k 는 자연수이므로 $k \geq 1$ 이고 $\sqrt{k+5} \geq \sqrt{6}$ 이다.

$t_1 = 1 + \sqrt{k+5}$ 의 경우, $1 + \sqrt{6} > -\frac{9}{4}$ 이므로 방정식 $x^2 - 3x = t_1$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서, 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근만을 가지려면 방정식 $x^2 - 3x = t_2$ (단, $t_2 = 1 - \sqrt{k+5}$)는 실근을 갖지 않아야 한다.

MathGenix 2026년 고1 10월 모의고사

이 조건은 $t_2 < -\frac{9}{4}$ 이므로 $1-\sqrt{k+5} < -\frac{9}{4}$ 이다.
이 부등식을 정리하면 $\frac{13}{4} < \sqrt{k+5}$ 이고, 양변을 제곱하면 $\frac{169}{16} < k+5$ 이다.
따라서 $k > \frac{169}{16} - 5 = \frac{89}{16} = 5.5625$ 이다.
문제의 조건에서 k 는 10 이하의 자연수이므로 가능한 k 의 값은 $6, 7, 8, 9, 10$ 이다.
그러므로 모든 자연수 k 의 값의 합은 $6+7+8+9+10 = 40$ 이다.

---

27. 정답 및 풀이

정답: 16

[출제의도] 고차방정식의 근의 성질과 복소수의 거듭제곱의 주기성을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 사차방정식 $x^4+x^3-x-1=0$ 을 인수분해하면 $x^3(x+1)-(x+1)=(x^3-1)(x+1)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)=0$ 이다. ω 는 허근이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근이다. 따라서 $\omega^2+\omega+1=0$ 이고 $\omega^3=1$ 이다. 또한, ω 의 켤레복소수 $\bar{\omega}$ 도 $x^2+x+1=0$ 의 근이므로 $\bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$, $\bar{\omega}^3=1$ 이다.

근의 성질에 따라 $1+\omega=-\omega^2$ 이고 $1+\bar{\omega}=-\bar{\omega}^2$ 이다. 주어진 등식의 좌변을 변형하면, $(1+\omega)^{2n}+(1+\bar{\omega})^{2n}=(-\omega^2)^{2n}+(-\bar{\omega}^2)^{2n}=\omega^{4n}+\bar{\omega}^{4n}$ 이다. $\omega^3=1$ 이므로 $\omega^{4n}=(\omega^3\cdot\omega)^n=\omega^n$ 이고, 마찬가지로 $\bar{\omega}^{4n}=\bar{\omega}^n$ 이다. 따라서 주어진 등식은 $\omega^n+\bar{\omega}^n=2$ 가 된다.

근과 계수의 관계에서 $\omega+\bar{\omega}=-1$, $\omega\bar{\omega}=1$ 이다. $\omega^n+\bar{\omega}^n$ 의 값은 n 을 3으로 나눈 나머지에 따라 주기성을 갖는다. k 가 자연수일 때, $n=3k$ 이면 $\omega^{3k}+\bar{\omega}^{3k}=(\omega^3)^k+(\bar{\omega}^3)^k=1^k+1^k=2$ 이다. n 이 3의 배수가 아니면 $\omega^n+\bar{\omega}^n=-1$ 이다. 따라서 주어진 등식을 만족시키는 자연수 n 은 3의 배수이다. 50 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 $\lfloor\frac{50}{3}\rfloor=16$ 개이다.

---

28. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 다항식의 항등식과 인수분해를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 다항식을 결정하고 함숫값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

조건 (가)의 좌변을 인수분해하면 $(P(x)-Q(x))(P(x)+Q(x))=(x^2-1)(x^2-4)$ 입니다. $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 이차다항식이므로 $P(x)+Q(x)$ 와 $P(x)-Q(x)$ 는 모두 이차 이하의 다항식이고, 두 식의 곱이 사차식이므로 두 식 모두 이차식입니다.

조건 (나)에서 함수 $y=Q(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로 $Q(x)$ 는 우함수입니다. 즉, $Q(x)=ax^2+c$ 꼴입니다. $P(x)+Q(x)$ 와 $P(x)-Q(x)$ 를 각각 $A(x)$, $B(x)$ 라 하면 $Q(x)=\frac{A(x)-B(x)}{2}$ 입니다. x^4-5x^2+4 의 인수 (x^2-1) , (x^2-4) 가 모두 우함수이므로, $A(x)$ 와 $B(x)$ 도 각각 우함수가 되어야 $Q(x)$ 가 우함수가 될 수 있습니다. 따라서 상수 $k(k\neq 0)$ 에 대하여 $\{A(x), B(x)\}$ 는 $\{k(x^2-1), \frac{1}{k}(x^2-4)\}$ 또는 $\{k(x^2-4), \frac{1}{k}(x^2-1)\}$ 입니다.

방정식 $Q(x)=0$, 즉 $A(x)=B(x)$ 가 서로 다른 두 실근을 가져야 합니다.
(i) $A(x)=k(x^2-1), B(x)=\frac{1}{k}(x^2-4)$ 일 때: $k(x^2-1)=\frac{1}{k}(x^2-4) \Rightarrow (k^2-1)x^2=k^2-4$. 서로 다른 두 실근 조건에 의해 $x^2=\frac{k^2-4}{k^2-1}>0$ 이므로, $k^2>4$ 또는 $k^2<1$ 입니다. $P(0)=\frac{A(0)+B(0)}{2}=\frac{-k-4/k}{2}=-\frac{5}{2}$ 에서 $k+\frac{4}{k}=5$, 즉 $k^2-5k+4=0$ 이므로 $(k-1)(k-4)=0$. 따라서 $k=4$ 입니다. ($k^2=16>4$)
(ii) $A(x)=k(x^2-4), B(x)=\frac{1}{k}(x^2-1)$ 일 때: $k(x^2-4)=\frac{1}{k}(x^2-1) \Rightarrow (k^2-1)x^2=4k^2-1$. 서로 다른 두 실근 조건에 의해 $x^2=\frac{4k^2-1}{k^2-1}>0$ 이므로, $k^2>1$ 또는 $k^2<1/4$ 입니다. $P(0)=\frac{A(0)+B(0)}{2}=\frac{-4k-1/k}{2}=-\frac{5}{2}$ 에서 $4k+\frac{1}{k}=5$, 즉 $4k^2-5k+1=0$ 이므로 $(4k-1)(k-1)=0$. 따라서 $k=\frac{1}{4}$ 입니다. ($k^2=1/16<1/4$)

두 경우에 대해 $Q(0)$ 의 부호를 확인합니다.
(i) $k=4$ 일 때: $A(x)=4(x^2-1), B(x)=\frac{1}{4}(x^2-4)$. $Q(0)=\frac{A(0)-B(0)}{2}=\frac{-4-(-1)}{2}=-\frac{3}{2}<0$ 이므로 조건을 만족합니다.
(ii) $k=\frac{1}{4}$ 일 때: $A(x)=\frac{1}{4}(x^2-4), B(x)=4(x^2-1)$. $Q(0)=\frac{A(0)-B(0)}{2}=\frac{-1-(-4)}{2}=\frac{3}{2}>0$ 이므로 조건을 만족하지 않습니다.

따라서 $P(x)+Q(x)=A(x)=4(x^2-1)$ 입니다.
문제에서 요구하는 값은 $P(2)+Q(2)=A(2)=4(2^2-1)=4(3)=12$ 입니다.

---

29. 정답 및 풀이

정답: 65

[출제의도] 직육면체의 성질을 이용하여 공간좌표를 설정하고, 두 미지수에 대한 연립방정식을 세워 그 해를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 점 E를 원점으로 하는 좌표공간에서 주요 점의 좌표는 $A(0,0,h)$, $C(a,a,h)$, $D(0,a,h)$, $G(a,a,0)$ 이다. 점 P는 점 A를 기준으로 D의 반대 방향에 있으므로 $P(0,-h,h)$ 이고, 점 Q는 선분 CD 위에 있고 $\overline{CQ}=h$ 이므로 $Q(a-h,a,h)$ 이다. 조건 (가)에서 $\overline{DQ}=\sqrt{(a-h-0)^2+(a-a)^2+(h-h)^2}=a-h$ 이고, $\overline{GP}^2=(a-0)^2+(a-(-h))^2+(0-h)^2=a^2+(a+h)^2+h^2=2(a^2+ah+h^2)$ 이다. 따라서 $\overline{DQ}\times\overline{GP}^2=(a-h)\times 2(a^2+ah+h^2)=2(a^3-h^3)=\frac{63}{4}$ 이므로, $a^3-h^3=\frac{63}{8}$ 이다. 조건 (나)에서 두 부피의 차는 $|a^2h-ah^2|=\frac{3}{2}$ 이고 $a>h$ 이므로 $a^2h-ah^2=ah(a-h)=\frac{3}{2}$ 이다.

$a-h=D$, $ah=P$ 라 하면 $a^3-h^3=(a-h)^3+3ah(a-h)=D^3+3PD=\frac{63}{8}$ 이다. 조건 (나)의 식 $PD=\frac{3}{2}$ 를 대입하면 $D^3+3(\frac{3}{2})=\frac{63}{8}$, $D^3=\frac{63}{8}-\frac{36}{8}=\frac{27}{8}$ 이므로 $D=a-h=\frac{3}{2}$ 이다. 이를 다시 $PD=\frac{3}{2}$ 에 대입하면 $P=ah=1$ 이다.

구하는 값은 $8(a^3+h^3)$ 이다. $(a+h)^2=(a-h)^2+4ah=(\frac{3}{2})^2+4(1)=\frac{25}{4}$ 에서 $a+h=\frac{5}{2}$ 이다. 또한
$a^2+h^2=(a-h)^2+2ah=(\frac{3}{2})^2+2(1)=\frac{17}{4}$ 이다.
$a^3+h^3=(a+h)(a^2-ah+h^2)=\frac{5}{2}(\frac{17}{4}-1)=\frac{5}{2}\times\frac{13}{4}=\frac{65}{8}$ 이다. 따라서 $8(a^3+h^3)=8\times\frac{65}{8}=65$ 이다.

---

30. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 두 이차함수의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 x 좌표의 합으로 정의된 새로운 함수의 치역을 분석하여 미지수의 값을 구한다.

[풀이]
$f(x)=t$ 즉 $x^2+4x-t=0$ 이 실근을 가질 때, 근과 계수의 관계에 의해 두 실근의 합은 -4 이다. 이는 $f(x)=(x+2)^2-4$ 에서 $t\geq -4$ 일 때 성립한다.
$g(x)=t$ 즉 $-x^2+2kx-t=0$ 이 실근을 가질 때, 근과 계수의 관계에 의해 두 실근의 합은 $2k$ 이다. 이는 $g(x)=-(x-k)^2+k^2$ 에서 $t\leq k^2$ 일 때 성립한다.

함수 $h(t)$ 의 값은 일반적으로 두 근의 합의 총합인 $2k-4$ 이지만, t 가 $f(x)$ 또는 $g(x)$ 의 꼭짓점의 y 좌표이거나 두 그래프의 교점의 y 좌표일 때 달라질 수 있다.

두 그래프의 교점의 x 좌표는 $x^2+4x=-x^2+2kx$ 에서 $2x^2+(4-2k)x=0$, 즉 $2x(x-(k-2))=0$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=k-2$ 이다.

1. $f(x)$ 의 꼭짓점: $t=-4$. $f(x)=-4$ 는 중근 $x=-2$ 를 갖고, $g(x)=-4$ 는 두 실근(합 $2k$)을 가지므로 $h(-4)=-2+2k$ 이다.
2. $g(x)$ 의 꼭짓점: $t=k^2$. $g(x)=k^2$ 는 중근 $x=k$ 를 갖고, $f(x)=k^2$ 는 두 실근(합 -4)을 가지므로 $h(k^2)=k-4$ 이다.
3. 교점 ($x=k-2$): $t=f(k-2)=(k-2)^2+4(k-2)=k^2-4$. 이때 $f(x)=t$ 의 두 근은 $k-2,\ -k-2$ 이고, $g(x)=t$ 의 두 근은 $k-2, k+2$ 이다. 전체 실근 집합은 $\{k-2,\ -k-2, k+2\}$ 이므로 $h(k^2-4)=(k-2)+(-k-2)+(k+2)=k-2$ 이다.
4. 교점 ($x=0$): $t=f(0)=0$. 이때 $f(x)=0$ 의 두 근은 $0,\ -4$ 이고, $g(x)=0$ 의 두 근은 $0, 2k$ 이다. 전체 실근 집합은 $\{0,\ -4, 2k\}$ 이므로 $h(0)=0-4+2k=2k-4$ 이다. 이는 일반적인 $h(t)$ 값과 같다.

$k\neq 2$ 일 때, $h(t)$ 의 치역은 $\{2k-4, 2k-2, k-4, k-2\}$ 이다. (만약 $k=2$ 이면, 치역은 $\{0, 2, -2\}$ 가 되어 합이 0이다.)
치역의 모든 원소의 합은 $(2k-4)+(2k-2)+(k-4)+(k-2)=6k-12$ 이다.
주어진 조건에 따라 $6k-12=30$ 이므로 $6k=42$ 이다.

따라서 $k = 7$ 이다.