MathGenix 2026년 고1 10월 모의고사 대비 시험 01 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2610-01-SOL 출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
②	②	②	②	③	①	③	③	③	③

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
②	①	③	②	③	⑤	③	③	③	②

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
④	3	0	3	288	2	18	3	114	24

---

1. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 다항식의 연산에 대한 관계식을 이용하여 미지의 다항식을 계산할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건은 $A+B=3x^2+2y^2$ 과 $2A+B=4x^2-xy+5y^2$ 이다.

$A=(2A+B)-(A+B)$ 이므로, 두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 다항식 A 를 구할 수 있다.

$A=(4x^2-xy+5y^2)-(3x^2+2y^2)=4x^2-xy+5y^2-3x^2-2y^2=x^2-xy+3y^2$ 이다.

따라서 구하는 다항식 A 는 $x^2-xy+3y^2$ 이다.

---

2. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 좌표평면에서 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는다.

[풀이] 두 점 $A(-2,1)$, $B(a,-1)$ 사이의 거리의 제곱은 $(a-(-2))^2+(-1-1)^2=(a+2)^2+4$ 이다. 문제의 조건에서 거리가 $2\sqrt{5}$ 이므로 거리의 제곱은 $(2\sqrt{5})^2=20$ 이다. 따라서 $(a+2)^2+4=20$ 이므로 $(a+2)^2=16$ 이고, $a+2=4$ 또는 $a+2=-4$ 이다. a 가 양수이므로 $a=2$ 이다.

---

3. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 행렬의 모든 성분의 합을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 등식 $X+2B=A$ 를 행렬 X 에 대하여 정리하면 $X=A-2B$ 이다.

행렬 A 와 B 의 성분을 대입하여 X 를 계산하면, $X=\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-4\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-7&2\end{pmatrix}$ 이다.

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은 $2+4+(-7)+2=1$ 이다.

---

4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 다항식의 나눗셈 관계를 항등식으로 표현하고 계수비교법을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 다항식의 나눗셈에 대한 검산식을 세우면 항등식이 된다. 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $x^3+ax^2+5x+b=(x^2+x+2)Q(x)+x+3$ 이다. 이때, 3차식을 2차식으로 나누었으므로 몫 $Q(x)$ 는 $x+c$ 형태의 1차식이다. (c 는 상수)

$x^3+ax^2+5x+b=(x^2+x+2)(x+c)+x+3$ 에서 우변을 전개하면 $x^3+(c+1)x^2+(c+3)x+(2c+3)$ 이다.

양변의 계수를 비교하면 $a=c+1$, $5=c+3$, $b=2c+3$ 이다. $5=c+3$ 에서 $c=2$ 이고, 이를 대입하면 $a=2+1=3$, $b=2(2)+3=7$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a-b=3-7=-4$ 이다.

---

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 직선에 대한 대칭이동의 성질을 이용하여 원의 방정식의 미지수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원 $C:(x+a)^2+(y-3)^2=4$ 의 중심은 점 $(-a,3)$ 이다. 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 원의 중심도 동일하게 대칭이동하므로, 원 C' 의 중심 좌표는 점 $(-a,3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점인 $(3,\ -a)$ 이다.

원 C' 의 중심 $(3,\ -a)$ 는 직선 $y=-2x+7$ 위에 있으므로, 이 점의 좌표를 직선의 방정식에 대입하면 등식이 성립한다. 즉, $-a=-2(3)+7$ 이다.

따라서 $-a=-6+7=1$ 이므로, 구하는 상수 a 의 값은 -1 이다.

---

6. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식에서 해의 개수에 대한 조건을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 연립방정식의 첫 번째 식 $y-2x=k$ 를 $y=2x+k$ 로 변형하여 두 번째 식 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면 $x^2+(2x+k)^2=5$ 이다.

이 식을 x 에 대하여 정리하면 $x^2+(4x^2+4kx+k^2)=5$, 즉 $5x^2+4kx+k^2-5=0$ 이다.

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 x 에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때 $D=0$ 이어야 한다.

$D/4=(2k)^2-5(k^2-5)=4k^2-5k^2+25=-k^2+25=0$ 이다.

따라서 $k^2=25$ 이므로 가능한 실수 k 의 값은 5 와 -5 이다.

모든 실수 k 의 값의 곱은 $5\times(-5)=-25$ 이다.

---

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 행렬의 성분 정의를 이해하고 행렬의 연산을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 상수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

주어진 조건에 따라 행렬 A 의 각 성분을 구하면 $a_{11}=-1$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=0$, $a_{22}=-2$ 이므로

$A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ 이다.

$A-kE=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-k & -3\\ 0 & -2-k\end{pmatrix}$ 이다.

행렬 $C=A(A-kE)$ 의 $(2,2)$ 성분은 A 의 2행과 $A-kE$ 의 2열을 곱하여 얻으므로

$0\times(-3)+(-2)\times(-2-k)=4+2k$ 이다.

$4+2k=10$ 이므로 $2k=6$, 따라서 $k=3$ 이다.

---

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 복소수의 사칙연산과 실수 계수 이차방정식의 켤레근 성질을 이용하여 식의 값을 구하는 문항이다.

[풀이]

주어진 등식 $z(1-i)=3+i$ 에서

$z=\frac{3+i}{1-i}$ 이다.

분모와 분자에 $1+i$ 를 곱하면

$z=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$ 이다.

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 계수 a , b 가 실수이고 한 근이 $z=1+2i$ 이므로 다른 한 근은 켤레복소수 $\overline{z}=1-2i$ 이다.

두 근의 합은 a 이고 두 근의 곱은 b 이므로

$a=z+\overline{z}=(1+2i)+(1-2i)=2$,

$b=z\overline{z}=(1+2i)(1-2i)=1+4=5$ 이다.

따라서 $a+b=2+5=7$ 이다.

---

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각형의 무게중심 좌표를 구하고, 이 점이 주어진 직선 위의 점임을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

세 점 $O(0,0)$, $A(-2,1)$, $B(a,5)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심 G 의 좌표는

$\left(\frac{0-2+a}{3},\frac{0+1+5}{3}\right)$ 이므로 $G\left(\frac{a-2}{3},2\right)$ 이다.

점 G 가 직선 $y=2x+6$ 위에 있으므로

$2=2\left(\frac{a-2}{3}\right)+6$ 이다.

이를 정리하면 $-4=\frac{2(a-2)}{3}$ 이고, $-12=2a-4$ 이므로 $2a=-8$ 이다.

따라서 $a=-4$ 이다.

---

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 두 사건의 합사건에 대하여 중복되는 경우를 고려하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

두 번 던져서 나오는 눈의 수 a,b 는 각각 1 부터 6 까지의 자연수이다.

$a+b$ 가 5의 배수인 사건을 A , $a\times b$ 가 6의 배수인 사건을 B 라 하자.

사건 A 의 경우 $a+b=5$ 또는 $a+b=10$ 이다.

$a+b=5$ 인 순서쌍은 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ 로 4개이다.

$a+b=10$ 인 순서쌍은 $(4,6),(5,5),(6,4)$ 로 3개이다.

따라서 $n(A)=4+3=7$ 이다.

사건 B 의 경우 $a\times b$ 가 6의 배수인 순서쌍은

$(1,6),(2,3),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$ 으로 15개이다. 따라서 $n(B)=15$ 이다.

사건 $A\cap B$ 는 $a+b$ 가 5의 배수이면서 $a\times b$ 가 6의 배수인 경우이다.

사건 A 의 순서쌍 중에서 $a\times b$ 가 6의 배수인 것을 찾으면 $(2,3),(3,2),(4,6),(6,4)$ 로 4개이다. 따라서 $n(A\cap B)=4$ 이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의해 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=7+15-4=18$ 이다.

---

11. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 매개변수를 포함한 연립이차부등식의 해에 포함된 정수의 개수에 대한 조건을 이용하여 매개변수의 값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2-6x-16<0$ 을 인수분해하면 $(x+2)(x-8)<0$ 이므로, 해는 $-2<x<8$ 입니다.

두 번째 부등식 $x^2-(a+1)x+a\le 0$ 을 인수분해하면 $(x-1)(x-a)\le 0$ 입니다.

주어진 조건에 따라 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x 의 개수는 3입니다. 첫 번째 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 입니다. a 가 자연수이므로 $a\ge 1$ 입니다. 만약 $a=1$ 이면 두 번째 부등식의 해는 $x=1$ 이므로 공통 정수는 1개입니다. $a>1$ 이면 두 번째 부등식의 해는 $1\le x\le a$ 입니다.

연립부등식을 만족시키는 정수 x 는 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 중 3개여야 하므로, 공통으로 만족시키는 정수는 $1, 2, 3$ 이어야 합니다. 따라서 정수 3 은 공통 범위에 포함되어야 하고, 정수 4 는 포함되지 않아야 합니다. 이를 만족시키는 a 의 범위는 $3\le a<4$ 입니다. 따라서 이 범위에 속하는 자연수 a 의 값은 3입니다.

---

12. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 복소수의 제곱이 음의 실수가 될 조건을 이해하고, 이를 만족하는 미지수의 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

복소수 $w=z-(7+i)$ 를 실수 a 에 대한 식으로 정리하면 $w=(a^2-2a-1-7)+(2a-5-1)i=(a^2-2a-8)+(2a-6)i$ 이다.

w^2 이 음의 실수가 되려면 w 는 0 이 아닌 순허수여야 한다. 따라서 w 의 실수부분은 0 이고 허수부분은 0 이 아니어야 한다.

실수부분이 0 이 되는 조건은 $a^2-2a-8=0$ 이므로 $(a-4)(a+2)=0$ 에서 $a=4$ 또는 $a=-2$ 이다.

$a=4$ 일 때, 허수부분은 $2(4)-6=2\neq 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

$a=-2$ 일 때, 허수부분은 $2(-2)-6=-10\neq 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱은 $4\times(-2)=-8$ 이다.

---

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 자연수 매개변수를 포함하는 연립부등식의 정수 해의 개수에 대한 조건을 이용하여 매개변수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $|x-n|\ge 2n$ 에서 $x-n\le -2n$ 또는 $x-n\ge 2n$ 이므로, $x\le -n$ 또는 $x\ge 3n$ 이다.

두 번째 부등식 $x^2-4nx-21n^2<0$ 을 인수분해하면 $(x+3n)(x-7n)<0$ 이다. 자연수 n 에 대하여 $-3n<7n$ 이므로, 해는 $-3n<x<7n$ 이다.

두 부등식의 공통 범위를 구하면 $-3n<x\le -n$ 또는 $3n\le x<7n$ 이다.

이 범위를 만족시키는 정수 x 의 개수는 첫 번째 범위에서 $(-n)-(-3n+1)+1=2n$ 개, 두 번째 범위에서 $(7n-1)-3n+1=4n$ 개이다.

따라서 총 정수의 개수는 $2n+4n=6n$ 이고, 이 값이 24이므로 $6n=24$ 에서 $n=4$ 이다.

---

14. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계 및 삼각형 넓이의 최댓값에 대한 기하학적 성질을 이용하여 원의 중심 좌표를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

원의 반지름을 r , 원의 중심에서 직선 $3x-4y+10=0$ 까지의 거리를 d 라 하자. 삼각형 ABP의 밑변은 선분 AB이고 그 길이는 8이다. 높이가 최대일 때 넓이가 최대이므로 높이의 최댓값은 $r+d$ 이다. 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 8\times(r+d)=4(r+d)$ 이고, 이 값이 32이므로 $r+d=8$ 이다.

원의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발은 현 AB를 이등분하므로, 원의 중심, 현의 중점, 점 A를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용하면 $r^2 = d^2 + (\frac{8}{2})^2 = d^2 + 16$ 이다. 위에서 구한 관계식 $r = 8 - d$ 를 대입하면 $(8-d)^2 = d^2 + 16$ 이고, $64 - 16d + d^2 = d^2 + 16$ 에서 $16d = 48$ 이므로 $d = 3$ 이다.

원의 중심은 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 2a)$ 로 놓을 수 있다. 점 $(a, 2a)$ 와 직선 $3x - 4y + 10 = 0$ 사이의 거리 d 는 $d = \frac{|3a - 4(2a) + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-5a + 10|}{5} = |2 - a|$ 이다. $d = 3$ 이므로 $|2 - a| = 3$ 이다. 따라서 $2 - a = 3$ 또는 $2 - a = -3$ 이므로, 가능한 a 의 값은 -1 과 5 이다. 이들의 합은 $-1 + 5 = 4$ 이다.

---

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원의 방정식과 점의 대칭이동 성질을 이용하여 특정 조건을 만족하는 도형의 넓이를 구하고, 이를 통해 미지수의 값을 찾는 문제 해결 능력을 평가한다.

[풀이]

조건 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 와 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 는 두 점 P, Q가 선분 AB의 수직이등분선 위에 있음을 의미한다. 두 점 $A(a, b)$, $B(a, -b)$ 의 중점은 $(a, 0)$ 이고 선분 AB는 x 축에 수직이므로, 선분 AB의 수직이등분선은 직선 $y = 0$ 이다. 점 P, Q는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과 직선 $y = 0$ 의 교점이므로, $x^2 + 0^2 = 16$ 에서 $x = \pm 4$ 이다. 따라서 P, Q의 좌표는 각각 $(4, 0), (-4, 0)$ 이다.

사각형 APBQ는 두 대각선 AB와 PQ가 서로 수직으로 만난다. 대각선의 길이는 각각 $\overline{PQ} = 4 - (-4) = 8$ 이고, $b > 0$ 이므로 $\overline{AB} = \sqrt{(a-a)^2 + (-b-b)^2} = \sqrt{(-2b)^2} = 2b$ 이다. 사각형 APBQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 \times 2b = 8b$ 이다. 넓이가 $12\sqrt{3}$ 이므로 $8b = 12\sqrt{3}$ 에서 $b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

점 $A(a, b)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 16$ 이 성립한다. $b^2 = (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{27}{4}$ 이므로, $a^2 + \frac{27}{4} = 16$ 이다. 따라서 $a^2 = 16 - \frac{27}{4} = \frac{64 - 27}{4} = \frac{37}{4}$ 이다.

---

16. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 주어진 집합에서 일부를 선택하고, 특정 원소들이 모두 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 조합과 순열의 원리를 이용하여 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

전체 6개의 자연수 중 5개를 선택하는 것은 1개의 자연수를 제외하는 것과 같다. 제외되는 자연수가 짝수인지 홀수인지에 따라 경우를 나눈다.

(i) 짝수 1개를 제외하는 경우:

제외할 짝수를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이다. 선택된 수는 짝수 2개, 홀수 3개이다.

홀수 3개를 하나의 묶음으로 생각하면, 이 묶음과 짝수 2개를 배열하는 경우의 수는 $3!$ 이다.

묶음 안에서 홀수 3개를 배열하는 경우의 수는 $3!$ 이다.

따라서 이 경우의 수는 $3 \times (3! \times 3!) = 3 \times 6 \times 6 = 108$ 이다.

(ii) 홀수 1개를 제외하는 경우:

제외할 홀수를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이다. 선택된 수는 짝수 3개, 홀수 2개이다.

홀수 2개를 하나의 묶음으로 생각하면, 이 묶음과 짝수 3개를 배열하는 경우의 수는 $4!$ 이다.

묶음 안에서 홀수 2개를 배열하는 경우의 수는 $2!$ 이다.

따라서 이 경우의 수는 $3 \times (4! \times 2!) = 3 \times 24 \times 2 = 144$ 이다.

(i)과 (ii)는 동시에 일어나지 않으므로, 구하는 총 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $108 + 144 = 252$ 이다.

---

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수와 직선의 교점으로 정의된 구간에서 이차함수의 최대·최소 개념을 이용하여 미정계수를 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

이차함수 $f(x)=x^2+ax+1$ 의 그래프와 직선 $y=4x-8$ 의 교점의 x 좌표 α, β 는 이차방정식 $x^2+ax+1=4x-8$, 즉 $x^2+(a-4)x+9=0$ 의 두 실근이다. 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식 $D=(a-4)^2-36>0$ 에서 $a-4<-6$ 또는 $a-4>6$ 이므로, $a<-2$ 또는 $a>10$ 이다.

함수 $f(x)=x^2+ax+1$ 은 아래로 볼록한 이차함수이고, 그래프의 대칭축은 $x=-\frac{a}{2}$ 이다.

(i) 대칭축 $x=-\frac{a}{2}$ 가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에 포함될 경우:

$f(x)$ 의 최솟값은 꼭짓점의 y 좌표인 $f(-\frac{a}{2})=(-\frac{a}{2})^2+a(-\frac{a}{2})+1=-\frac{a^2}{4}+1$ 이다.

주어진 최솟값이 -3 이므로, $-\frac{a^2}{4}+1=-3$ 에서 $a^2=16$ 이다. 따라서 $a=4$ 또는 $a=-4$ 이다.

$a<-2$ 또는 $a>10$ 이므로 $a=4$ 는 조건에 맞지 않고, $a=-4$ 만 가능하다.

$a=-4$ 일 때, 대칭축은 $x=2$ 이고 교점 방정식은 $x^2-8x+9=0$ 이므로 근은 $x=4\pm\sqrt{7}$ 이다. 구간은 $[4-\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}]$ 이고, $4-\sqrt{7}<2<4+\sqrt{7}$ 이므로 대칭축 $x=2$ 가 구간에 포함된다는 가정이 성립한다. 따라서 $a=-4$ 는 문제의 조건을 만족시킨다.

(ii) 대칭축 $x=-\frac{a}{2}$ 가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에 포함되지 않을 경우:

$f(x)$ 는 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 단조증가 또는 단조감소하므로 최솟값은 양 끝점 $f(\alpha)$ 또는 $f(\beta)$ 에서 발생한다.

$f(\alpha)=4\alpha-8$, $f(\beta)=4\beta-8$ 이고, $\alpha<\beta$ 이므로 $f(\alpha)<f(\beta)$ 이다. 최솟값은 $f(\alpha)$ 또는 $f(\beta)$ 중 하나여야 하는데, 어느 경우든 $f(x)$ 의 값은 양 끝점에서의 값과 같다.

만약 대칭축이 구간보다 왼쪽에 있다면($-\frac{a}{2}<\alpha$), $f(x)$ 는 구간에서 증가하므로 최솟값은 $f(\alpha)=4\alpha-8=-3$ 이다. 이 경우 $\alpha=\frac{5}{4}$ 이다. 이를 교점 방정식에 대입하면 $(\frac{5}{4})^2+(a-4)(\frac{5}{4})+9=0$ 에서 $a=-\frac{89}{20}$ 이다. 이때 대칭축은 $x=\frac{89}{40}\approx 2.225$ 이고 $\alpha=1.25$ 이므로, $-\frac{a}{2}<\alpha$ 라는 가정이 성립하지 않는다.

만약 대칭축이 구간보다 오른쪽에 있다면($-\frac{a}{2}>\beta$), $f(x)$ 는 구간에서 감소하므로 최솟값은 $f(\beta)=4\beta-8=-3$ 이다. 이 경우 $\beta=\frac{5}{4}$ 이다. $\alpha\beta=9$ 이므로 $\alpha=\frac{36}{5}$ 가 되어 $\alpha<\beta$ 에 모순이다.

따라서 (ii)의 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의해, 구하는 상수 a 의 값은 -4 이다. [4점]

---

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 함수의 그래프 위의 점 사이의 거리를 절댓값을 포함한 이차부등식으로 나타내어 해를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

직선 $x=k$ 위의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(k, f(k))$, $(k, g(k))$ 이다. 이때 $f(k)=-k^2+5k$, $g(k)=k^2-3k+5$ 이다. 선분 PQ의 길이는 $|f(k)-g(k)|$ 이므로 조건에 따라 $|f(k)-g(k)|\le 3$ 이다.

$|f(k)-g(k)|=|(-k^2+5k)-(k^2-3k+5)|=|-2k^2+8k-5|=|2k^2-8k+5|$ 이다. 따라서 부등식 $|2k^2-8k+5|\le 3$ 을 풀어야 한다. 이는 $-3\le 2k^2-8k+5\le 3$ 과 같다.

(i) $2k^2-8k+5\ge -3$ 에서 $2k^2-8k+8\ge 0$, 즉 $k^2-4k+4\ge 0$ 이므로 $(k-2)^2\ge 0$ 이다. 이 부등식은 모든 실수 k 에 대해 성립한다.

(ii) $2k^2-8k+5\le 3$ 에서 $2k^2-8k+2\le 0$, 즉 $k^2-4k+1\le 0$ 이다. 이차방정식 $k^2-4k+1=0$ 의 해는 근의 공식에 의해 $k=2\pm\sqrt{3}$ 이므로, 부등식의 해는 $2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$ 이다.

(i)과 (ii)의 공통 범위를 구하면 $2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$ 이다. $1<\sqrt{3}<2$ 이므로 $0<2-\sqrt{3}<1$ 이고 $3<2+\sqrt{3}<4$ 이다. 따라서 이 범위를 만족시키는 정수 k 는 1, 2, 3이다. 모든 정수 k 의 값의 합은 $1+2+3=6$ 이다.

MathGenix 2025년 고1 10월 모의고사

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 나눗셈에 대한 항등식과 나머지의 차수 조건을 이용하여 다항식을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

두 조건 (가), (나)로부터 $f(x)=P(x)Q(x)+\{P(x)\}^2-Q(x)$ 이다. 다항식의 나눗셈 정리에 의해 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 작아야 하므로, $\deg(\{P(x)\}^2-Q(x))<\deg(P(x))$ 이고 $\deg(\{P(x)\}^2-Q(x))<\deg(Q(x))$ 이다. $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 $\deg(P(x))+\deg(Q(x))=3$ 이다.

$\deg(P(x))=m$, $\deg(Q(x))=n$ 이라 할 때, $m=2, n=1$ 이면 $\deg(\{P(x)\}^2-Q(x))=4$ 가 되어 $\deg(P(x))=2$ 보다 크므로 모순이다. 따라서 $m=1, n=2$ 이어야 한다. 이 경우 나머지의 차수가 $\deg(P(x))=1$ 보다 작아야 하므로 $\{P(x)\}^2-Q(x)$ 는 상수이다. $P(x)=ax+b$, $Q(x)=cx^2+dx+e$ ($a\neq0, c\neq0$)라 하면, $\{P(x)\}^2-Q(x)=(a^2-c)x^2+(2ab-d)x+(b^2-e)$ 에서 $a^2-c=0$ 이고 $2ab-d=0$ 이다. $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $ac=1$ 이므로 $a(a^2)=a^3=1$ 이고, 계수가 실수이므로 $a=1$ 이다. 따라서 $c=1$ 이다. $P(0)=-1$ 에서 $b=-1$ 이고, $2ab-d=0$ 에서 $d=2(1)(-1)=-2$ 이다. 즉 $P(x)=x-1$, $Q(x)=x^2-2x+e$ 이다.

$f(0)=3$ 이므로 $f(0)=P(0)Q(0)+\{P(0)\}^2-Q(0)$ 에 값을 대입하면 $3=(-1)e+(-1)^2-e=1-2e$ 에서 $e=-1$ 이다. 따라서 $Q(x)=x^2-2x-1$ 이고, 나머지는 $\{P(x)\}^2-Q(x)=(x-1)^2-(x^2-2x-1)=2$ 이다.
$f(x)=(x-1)(x^2-2x-1)+2=(x^3-3x^2+x+1)+2=x^3-3x^2+x+3$ 이다. 그러므로 $f(3)=3^3-3(3^2)+3+3=6$ 이다.

---

20. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 포물선 위의 점으로 정의된 선분이 원과 만날 조건을 이용하여 미지수의 범위를 구하고 값을 계산한다.

[풀이]

선분 AB 는 직선 $y=t^2$ 위에 있고, x 좌표의 범위는 $-t\leq x\leq t$ 이다.
원의 방정식은 $x^2+(y-3)^2=1$ 이므로 직선 $y=t^2$ 과 교점이 존재하려면
$1-(t^2-3)^2\geq0$ 이어야 한다.
따라서 $2\leq t^2\leq4$ 이고, $t>0$ 이므로 $\sqrt{2}\leq t\leq2$ 이다.

교점의 x 좌표는 $x^2=1-(t^2-3)^2$ 을 만족한다. 이 교점이 선분 AB 위에 있어야 하므로 $x^2\leq t^2$ 이어야 한다.
$1-(t^2-3)^2\leq t^2$ 를 정리하면
$t^4-5t^2+8\geq0$ 이다.
$u=t^2$ 이라 놓으면 u^2-5u+8 의 판별식은 $25-32=-7<0$ 이고 최고차항의 계수가 양수이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

그러므로 $\sqrt{2}\leq t\leq2$ 이고, 최댓값 $M=2$, 최솟값 $m=\sqrt{2}$ 이다.
$M^2+m^2=2^2+(\sqrt{2})^2=4+2=6$ 이다.
[정답] ②

---

21. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 대칭이동을 이용하여 점과 원 사이의 최단 거리 문제를 해결하고, 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$\overline{AQ}+\overline{QP}$ 의 최솟값은 점 $A(a,\ -2a+9)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 $A'(-a,\ -2a+9)$ 와 원 C 위의 점 P 사이의 거리의 최솟값과 같다. 원 C 의 중심을 $O_C(10,2)$ 라 하면 이 최솟값은 선분 $\overline{A'O_C}$ 의 길이에서 반지름의 길이 3 을 뺀 값이다.

또한, $\overline{AR}+\overline{RP}$ 의 최솟값은 점 $A(a,\ -2a+9)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 $A''(-2a+9,a)$ 와 원 C 위의 점 P 사이의 거리의 최솟값과 같고, 이는 선분 $\overline{A''O_C}$ 의 길이에서 반지름의 길이 3 을 뺀 값이다.

두 최솟값이 서로 같으므로 $\overline{A'O_C}-3=\overline{A''O_C}-3$, 즉 $\overline{A'O_C}=\overline{A''O_C}$ 이다. 따라서 $\overline{A'O_C}^2=\overline{A''O_C}^2$ 가 성립한다.
$A'(-a,\ -2a+9)$ 와 $O_C(10,2)$ 사이의 거리의 제곱은
$\overline{A'O_C}^2=(-a-10)^2+(-2a+9-2)^2=(a+10)^2+(-2a+7)^2$
$=a^2+20a+100+4a^2-28a+49=5a^2-8a+149$

이다.

$A''(-2a+9, a)$ 와 $O_C(10, 2)$ 사이의 거리의 제곱은

$\overline{A''O_C}^2 = (-2a+9-10)^2 + (a-2)^2 = (-2a-1)^2 + (a-2)^2$

$= 4a^2 + 4a + 1 + a^2 - 4a + 4 = 5a^2 + 5$ 이다.

$5a^2 - 8a + 149 = 5a^2 + 5$ 를 풀면 $8a = 144$ 이므로 $a = 18$ 이다. $a = 18$ 은 조건 $a > 3$ 을 만족한다.

따라서 상수 a 의 값은 18 이다.

---

22. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 함께 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

직선 $x + 2y - 4 = 0$ 을 y 에 관하여 정리하면 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 이므로 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

직선 l 은 이 직선에 수직이므로, 직선 l 의 기울기는 $-1/(-\frac{1}{2}) = 2$ 이다.

직선 l 과 직선 $y = (k^2 - k - 4)x - 3$ 이 서로 평행하므로 두 직선의 기울기는 같다. 따라서 $k^2 - k - 4 = 2$ 이다.

이 식을 정리하면 $k^2 - k - 6 = 0$, 즉 $(k-3)(k+2) = 0$ 이다. 문제에서 k 는 양수이므로 $k = 3$ 이다.

---

23. 정답 및 풀이

정답: 0

[출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 미정계수를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

다항식 $P(x)$ 를 일차식으로 나눌 때의 나머지는 나머지정리를 이용하여 구할 수 있다. $P(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지 R_1 은 $P(-1)$ 이고, $x-2$ 로 나눈 나머지 R_2 는 $P(2)$ 이다.

$R_1 = P(-1) = 2(-1)^3 + a(-1)^2 + (-1) - 3 = -2 + a - 1 - 3 = a - 6$

$R_2 = P(2) = 2(2)^3 + a(2)^2 + 2 - 3 = 16 + 4a - 1 = 4a + 15$

주어진 조건 $R_1 + R_2 = 9$ 에 따라 $(a-6) + (4a+15) = 9$ 이므로, $5a + 9 = 9$ 에서 $5a = 0$ 이다.

따라서 상수 a 의 값은 0 이다.

---

24. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 행렬의 실수배, 덧셈 등 기본 연산을 수행하고, 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식 $pA + B = qE$ 에 행렬을 대입하여 정리하면 $p\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -2 & -9 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

좌변을 계산하면 $\begin{pmatrix} 3p-7 & 2p-4 \\ p-2 & 4p-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ 이다.

행렬이 서로 같을 조건에 따라 각 성분을 비교하면, $(1, 2)$ 성분에서 $2p - 4 = 0$ 이므로 $p = 2$ 이다. 이를 $(1, 1)$ 성분 식 $3p - 7 = q$ 에 대입하면 $q = 3(2) - 7 = -1$ 이다. 이 값들은 $(2, 1)$ 성분과 $(2, 2)$ 성분에서도 모두 성립한다.

따라서 구하는 값은 $p - q = 2 - (-1) = 3$ 이다.

---

25. 정답 및 풀이

정답: 288

[출제의도] 주어진 수의 성질을 파악하고 특정 조건을 만족하는 순열의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 7을 3으로 나눈 나머지에 따라 분류한다. 나머지가 0인 집합은 $A_0 = \{3\}$, 나머지가 1인 집합은 $A_1 = \{1, 4, 7\}$, 나머지가 2인 집합은 $A_2 = \{2, 5\}$ 이다. 양 끝에 놓인 두 수의 합이 3의 배수가 되려면, 두 수의 나머지의 합이 3 또는 0이어야 한다. 가능한 경우는 나머지가 1인 수와 나머지가 2인 수를 양 끝에 놓는 경우뿐이다.

의 원소 3개 중 하나를, A_2 의 원소 2개 중 하나를 선택하여 양 끝에 배열하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times 2! = 3 \times 2 \times 2 = 12$ 이다. 남은 4장의 카드를 가운데 4자리에 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$ 이다.

따라서 곱의 법칙에 의해 구하는 총 경우의 수는 $12 \times 24 = 288$ 이다.

---

26. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 세우고, 두 접점 사이의 거리를 미지수를 이용하여 나타내어 주어진 값을 만족하는 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

함수 $f(x) = x^2 - 2x$ 라 하면 $f'(x) = 2x - 2$ 이다. 곡선 위의 점 $(t, t^2 - 2t)$ 에서의 접선의 방정식은 $y - (t^2 - 2t) = (2t - 2)(x - t)$ 이다. 이 접선이 점 $P(a, -1)$ 을 지나므로 $-1 - (t^2 - 2t) = (2t - 2)(a - t)$ 이고, 식을 정리하면 $t^2 - 2at + 2a - 1 = 0$ 이다. 두 접점 A , B 의 x 좌표를 각각 t_1, t_2 라 하면, t_1, t_2 는 위 t 에 대한 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해 $t_1 + t_2 = 2a$, $t_1 t_2 = 2a - 1$ 이다.

두 접점은 $A(t_1, t_1^2 - 2t_1)$, $B(t_2, t_2^2 - 2t_2)$ 이다. 선분 AB 의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로 $AB^2 = (t_2 - t_1)^2 + ((t_2^2 - 2t_2) - (t_1^2 - 2t_1))^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ 이다. $(t_2 - t_1)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = (2a)^2 - 4(2a - 1) = 4a^2 - 8a + 4 = 4(a - 1)^2$ 이다. 또한,

$(t_2^2 - 2t_2) - (t_1^2 - 2t_1) = (t_2 - t_1)(t_1 + t_2 - 2)$ 이므로,

$AB^2 = (t_2 - t_1)^2\{1 + (t_1 + t_2 - 2)^2\} = 4(a - 1)^2\{1 + (2a - 2)^2\} = 4(a - 1)^2\{1 + 4(a - 1)^2\} = 20$ 이다.

$(a - 1)^2\{1 + 4(a - 1)^2\} = 5$ 이다. $X = (a - 1)^2$ ($X > 0$)이라 하면 $X(1 + 4X) = 5$, 즉 $4X^2 + X - 5 = 0$ 이다.

$(4X + 5)(X - 1) = 0$ 에서 $X > 0$ 이므로 $X = 1$ 이다. 따라서 $(a - 1)^2 = 1$ 이므로 $a - 1 = 1$ 또는 $a - 1 = -1$ 이다. $a = 2$ 또는 $a = 0$ 인데, 문제에서 a 는 양수이므로 $a = 2$ 이다.

[4점]

---

27. 정답 및 풀이

정답: 18

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 근의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 상수를 구하고 식의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

이차방정식 $x^2 - kx + 2k - 4 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 2k - 4$ 이다. 또한, 두 근의 곱이 양수라는 조건에서 $\alpha\beta = 2k - 4 > 0$ 이므로 $k > 2$ 이다. 판별식 $D = (-k)^2 - 4(2k - 4) = k^2 - 8k + 16 = (k - 4)^2 > 0$ 이므로 $k \neq 4$ 이다.

α 는 주어진 이차방정식의 근이므로 $\alpha^2 - k\alpha + 2k - 4 = 0$, 즉 $\alpha^2 = k\alpha - 2k + 4$ 이다. 이 식을 조건 $\alpha^2 + k\beta = 19$ 에 대입하면 $(k\alpha - 2k + 4) + k\beta = 19$ 이고, $k(\alpha + \beta) - 2k + 4 = 19$ 로 정리된다. 여기에 $\alpha + \beta = k$ 를 대입하면 $k^2 - 2k + 4 = 19$ 이므로 $k^2 - 2k - 15 = 0$ 이다. 이 방정식을 풀면 $(k - 5)(k + 3) = 0$ 에서 $k = 5$ 또는 $k = -3$ 이다. 조건 $k > 2$ 를 만족하는 값은 $k = 5$ 이다.

따라서 $k = 5$ 일 때, $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = 2(5) - 4 = 6$ 이다. 구하는 값은

$\alpha^2 + \beta^2 + k = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + k = 5^2 - 2(6) + 5 = 25 - 12 + 5 = 18$ 이다.

---

28. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 원의 중심, 현의 길이, 원과 직선의 위치 관계에 대한 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 원의 반지름을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

원 C 의 중심을 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 하자. 중심이 제2사분면에 있으므로 $a < 0$, $b > 0$ 이다.

조건 (가)에서 원의 중심에서 x 축과 y 축에 이르는 거리가 같으므로 $|a| = b$ 이다. 따라서 $b = -a$ 이고, 중심의 좌표는 $(a, -a)$ 이다.

조건 (나)에서 사각형 ACBD의 두 대각선 AB, CD는 각각 x 축과 y 축 위에 있으므로 서로 수직이다. 선분 AB의 길이는 $2\sqrt{r^2 - b^2} = 2\sqrt{r^2 - a^2}$ 이고, 선분 CD의 길이도 $2\sqrt{r^2 - a^2}$ 이다. 사각형 ACBD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{1}{2}(2\sqrt{r^2 - a^2})^2 = 2(r^2 - a^2)$ 이다. 넓이가 16이므로 $2(r^2 - a^2) = 16$, 즉 $r^2 - a^2 = 8$ 이다.

조건 (다)에서 원의 중심 $(a,\ -a)$ 와 직선 $3x-4y-8=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 r 과 같다. 즉, $r=\frac{|3a-4(-a)-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|7a-8|}{5}$ 이다. $a<0$ 이므로 $7a-8<0$ 이고, 따라서 $5r=-(7a-8)=8-7a$ 이다. 이 식을 a 에 대하여 풀면 $a=\frac{8-5r}{7}$ 이다.
$a=\frac{8-5r}{7}$ 을 $r^2-a^2=8$ 에 대입하면, $r^2-\left(\frac{8-5r}{7}\right)^2=8$ 이다. $49r^2-(64-80r+25r^2)=392$ 이고, 이를 정리하면 $24r^2+80r-456=0$ 이다. 양변을 8로 나누면 $3r^2+10r-57=0$ 이고, 인수분해하면 $(3r+19)(r-3)=0$ 이다.
반지름 r 은 양수이므로 $r=3$ 이다. 이때 $a=\frac{8-5(3)}{7}=-1$ 이므로 중심은 제2사분면에 있다는 조건도 만족한다. 따라서 원 C 의 반지름의 길이는 3이다.

---

29. 정답 및 풀이

정답: 114

[출제의도] 삼각형의 무게중과 외심의 성질을 이용하여 직선 BC 를 구하고, 원과의 교점 사이의 거리를 계산한다.

[풀이]

변 BC 의 중점을 $M(x_M, y_M)$ 이라 하자. 무게중 $G(-1,1)$ 과 꼭짓점 $A(-4,6)$ 에 대하여
$G=\frac{A+2M}{3}$ 이므로 $M=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ 이다.

외심 $O(1,2)$ 와 M 을 이은 직선은 변 BC 의 수직이등분선이다. 직선 OM 의 기울기가 7 이므로 직선 BC 의 기울기는 $-\frac{1}{7}$ 이다.
점 M 을 지나는 직선 BC 의 방정식은
$x+7y+10=0$ 이다.

외접원의 반지름의 제곱은
$R^2=OA^2=(-4-1)^2+(6-2)^2=41$ 이므로 외접원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=41$ 이다.

$x=-7y-10$ 을 원의 방정식에 대입하면
$(-7y-11)^2+(y-2)^2=41$,
$25y^2+75y+42=0$ 을 얻는다.
두 교점의 y 좌표를 y_B, y_C 라 하면
$y_B+y_C=-3$, $y_By_C=\frac{42}{25}$ 이므로
$(y_B-y_C)^2=(-3)^2-4\cdot\frac{42}{25}=\frac{57}{25}$ 이다.

또한 $x_B-x_C=-7(y_B-y_C)$ 이므로
$BC^2=(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=50\cdot\frac{57}{25}=114$ 이다.

[정답] 114

---

30. 정답 및 풀이

정답: 24

[출제의도] 두 이차함수의 관계와 대칭성을 이용하여 교점의 좌표와 함수의 최댓값을 구한다.

[풀이]

$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+q$ 의 대칭축은 $x=p$ 이고,
$g(x)=-f(x-m)$ 의 대칭축은 $x=p+m$ 이다.

방정식 $h(x)=t$ 가 서로 다른 네 실근을 갖는 t 의 범위가 $k<t<5$ 이므로, 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 5 이다.
$g(x)$ 의 최댓값이 $-q$ 이므로 $-q=5$, 즉 $q=-5$ 이다.

방정식 $f(x)=g(x)$ 의 두 근을 α, β 이라 하면 대칭성에 의해
$\alpha+\beta=2p+m$ 이다.
한 근이 $p-m$ 이므로 다른 한 근은 $p+2m$ 이다.

$x=p-m$ 을 $f(x)=g(x)$ 에 대입하면
$f(p-m)=\frac{1}{2}m^2+q$

이고,

$g(p-m)=-f(p-2m)=-2m^2-q$ 이다.

따라서

$\frac{1}{2}m^2+q=-2m^2-q$,

$5m^2=-4q$ 이다.

$q=-5$ 를 대입하면 $m^2=4$ 이고, $m>0$ 이므로 $m=2$ 이다.

주어진 조건 $m(2p-m)=24$ 에 $m=2$ 를 대입하면

$2(2p-2)=24$ 이므로 $p=7$ 이다.

그러므로 $m(p-q)=2\{7-(-5)\}=24$ 이다.

[정답] 24