

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	③	③	③	③	③	③	③	③

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 불연속함수와 연속함수의 곱으로 만들어진 함수가 특정 지점에서 연속이 될 조건을 이해하고 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서만 불연속이므로, 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x = 1$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x + 1) = 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x + 3) = 4$ 이다.

연속 조건에 따라 $0 \cdot g(1) = 4 \cdot g(1)$ 이어야 하므로, $g(1) = 0$ 이다.

$g(x)$ 는 일차함수이고 $g(0) = -1$ 이므로 $g(x) = ax - 1$ 로 놓을 수 있다.

$g(1) = a - 1 = 0$ 에서 $a = 1$ 이므로 $g(x) = x - 1$ 이다.

따라서 $g(2) = 2 - 1 = 1$ 이다.

[정답] ③

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한이 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형일 때, 인수분해 및 약분을 통해 극한값을 계산할 수 있는지를 평가합니다.

[정석 풀이] $x \rightarrow -3$ 일 때, 분모는 $x + 3 \rightarrow 0$ 이고 분자는 $(x + 3)(x^2 - x + 4) \rightarrow 0$ 이므로, 주어진 식은 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형입니다. $x \rightarrow -3$ 은 x 가 -3 이 아니면서 -3 에 한없이 가까워지는 것을 의미하므로 $x + 3 \neq 0$ 입니다. 따라서 분모와 분자에서 공통인수 $x + 3$ 을 약분할 수 있습니다.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x^2 - x + 4)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x + 4)$$

함수 $f(x) = x^2 - x + 4$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속입니다. 따라서 극한값은 $x = -3$ 에서의 함수값과 같습니다.

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x + 4) = (-3)^2 - (-3) + 4 = 9 + 3 + 4 = 16$$

[정답] 따라서 구하는 극한값은 16 입니다.

3. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

다항함수의 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 극한값은 함수값과 같습니다.

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 입니다.

$f(2) = 2^2 + 3(2) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$ 이므로, 구하는 극한값은 9 입니다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

불연속함수와 연속함수의 곱으로 만들어진 새로운 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이 될 조건을 이해하고 이를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = x - a$ 는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 을 제외한 모든 실수에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x = 1$ 에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이기 위한 조건은 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이다.

$x = 1$ 에서의 좌극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - a)(x + 3) = (1 - a)(1 + 3) = 4(1 - a)$$

$x = 1$ 에서의 우극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - a)(x^2 + 1) = (1 - a)(1^2 + 1) = 2(1 - a)$$

함숫값은 $f(1)g(1) = (1 - a)(1 + 3) = 4(1 - a)$ 이다.

$x = 1$ 에서 연속이려면 좌극한과 우극한이 같아야 하므로,

$$4(1 - a) = 2(1 - a)$$

$$2(1 - a) = 0$$

따라서 $a = 1$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 합성함수의 연속성 조건을 이해하고, 이차방정식의 판별식을 이용하여 미지수의 범위를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속인 다항함수이므로, 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

유리함수 $g(x)$ 가 실수 전체에서 연속이 되기 위해서는 모든 실수 x 에 대하여 분모가 0이 되어서는 안 된다.

즉, 이차방정식 $x^2 + (k - 1)x + 4 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 한다.

$$D = (k - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0 \Rightarrow (k - 1)^2 - 16 < 0 \Rightarrow (k - 1)^2 < 16 \Rightarrow -4 < k - 1 < 4 \Rightarrow -3 < k < 5$$

이를 만족시키는 정수 k 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 이다.

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은 $(-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 7$ 이다.

[정답] ③

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[간략 풀이]

[출제의도] 이차방정식의 근과 구간의 관계를 이용하여 새롭게 정의된 함수의 불연속점을 추론하고, 이를 통해 이차함수의 식을 결정할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

이차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하자.

함수 $g(t)$ 는 닫힌구간 $[t, t+3]$ 의 양 끝점이 방정식 $f(x) = 0$ 의 근인 α 또는 β 를 지날 때 값이 변하므로 불연속이 된다.

따라서 $g(t)$ 가 불연속이 되는 t 값은 다음과 같다.

$$t = \alpha, t = \beta, t + 3 = \alpha, t + 3 = \beta$$

즉, 불연속점의 집합은 $\{\alpha - 3, \beta - 3, \alpha, \beta\}$ 이다.

... 반복되는 후보 계산은 생략합니다. ...

$$f(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 꼭짓점에서 발생한다. 꼭짓점의 x 좌표는 $\frac{1+5}{2} = 3$ 이다.

$$f(3) = (3-1)(3-5) = 2 \times (-2) = -4$$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 -4 이다.

[정답] ③

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 유리함수가 주어진 구간에서 연속일 조건을 이차방정식의 근의 분리 개념을 이용하여 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면, 모든 $x > 0$ 에 대하여 분모인 $x^2 - 2kx + 3k \neq 0$ 이어야 한다.

즉, 이차방정식 $g(x) = x^2 - 2kx + 3k = 0$ 이 양의 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) 방정식 $g(x) = 0$ 이 허근을 갖는 경우

$$\text{판별식 } D/4 = (-k)^2 - 3k < 0 \text{ 이므로, } k(k-3) < 0 \text{ 이다.}$$

따라서 $0 < k < 3$ 이고, 이를 만족하는 정수 k 는 1, 2 이다.

(ii) 방정식 $g(x) = 0$ 이 0 이하의 실근을 갖는 경우

$$\text{판별식 } D/4 = k^2 - 3k \geq 0 \text{ 이므로, } k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 3 \text{ 이다.}$$

두 근을 α, β 라 할 때, 두 근이 모두 0 이하하려면 (두 근의 합) ≤ 0 이고 (두 근의 곱) ≥ 0 이어야 한다.

$$(\text{두 근의 합}) = 2k \leq 0 \Rightarrow k \leq 0.$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 3k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0.$$

두 조건을 동시에 만족하는 k 의 값은 $k = 0$ 이다. 이 값은 판별식 조건($k \leq 0$)을 만족한다.

(i), (ii)에 의해 가능한 정수 k 는 0, 1, 2 로 총 3개이다.

[정답] ③

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

불연속함수와 연속함수의 곱으로 정의된 함수가 연속이 될 조건을 이해하고, 이를 이용해 다항함수의 함숫값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 는 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $g(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 연속성을 조사하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -1 + 1 = 0$$

$$x = 1$$

에서 $g(x)$ 의 좌극한과 우극한이 다르므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이 되려면 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x)$ 가 성립해야 한다.

$$f(1) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = f(1) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \quad \text{이므로 } 4f(1) = 0f(1) \quad \text{이다.}$$

따라서 $f(1) = 0$ 이어야 한다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면, $f(0) = 2$ 이므로 $b = 2$ 이다.

$f(x) = x^2 + ax + 2$ 에 $f(1) = 0$ 을 대입하면 $1 + a + 2 = 0$ 이므로 $a = -3$ 이다.

따라서 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 이고, 구하는 값은 $f(3) = 3^2 - 3(3) + 2 = 2$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[간략 풀이]

[출제의도]

역함수가 존재할 조건(일대일대응)을 이용하여 주어진 구간별로 정의된 함수의 상수를 결정하고, 이를 바탕으로 합성함수의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 일대일대응이어야 한다.

$x < 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 기울기가 -2 인 직선이므로 감소한다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 $x \geq 2$ 에서도 함수가 감소해야 하므로, 직선의 기울기인 $a + 1$ 은 0 보다 작아야 한다.

$a + 1 < 0$, 즉 $a < -1$ 이다.

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ 이어야 한다.

… 반복되는 후보 계산은 생략합니다. …

$$f(1) = -2(1) - 4 = -6$$

따라서 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(-6)$ 이다.

$f(-6)$ 의 값은 $-6 < 2$ 이므로 아래 식을 이용한다.

$$f(-6) = -2(-6) - 4 = 12 - 4 = 8$$

그러므로 구하는 값은 8 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[간략 풀이]

[출제의도]

집합의 연산과 함수의 그래프 개형을 연결하여 주어진 조건을 만족하는 함수를 추론하고, 추가적인 조건을 이용하여 함수를 결정한 후 함수값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $y = F(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수는 t 가 함수 $F(x)$ 의 극값이 될 때 변화하므로, 함수 $h_F(t)$ 가 불연속인 t 의 값의 집합은 $F(x)$ 의 극값의 집합과 같다.

따라서 S_f 는 $f(x)$ 의 극값의 집합이고, S_g 는 $g(x)$ 의 극값의 집합이다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가지므로 $n(S_f) = 2$ 이고, 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $g(x)$ 는 최댓값(극값)을 가지므로 $n(S_g) = 1$ 이다.

조건 $S_f \cup S_g = \{0, 3, 4\}$ 와 $S_f - S_g = \{0, 4\}$ 에서,

… 반복되는 후보 계산은 생략합니다. …

$-p = -2$ 이면 $g'(x) = -2(x + 2)$. $L'(x) = 3x^2 - 10x + 13$. $D/4 = 25 - 39 < 0$. 이 경우만 $D < 0$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 이고 $g(x) = -(x + 2)^2 + 3$ 이다.

$$f(4) = 4^3 - 6(4^2) + 9(4) = 64 - 96 + 36 = 4 \quad .$$

$$g(4) = -(4 + 2)^2 + 3 = -36 + 3 = -33 \quad .$$

$$f(4) + g(4) = 4 + (-33) = -29 \quad .$$