

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
⑤	③	④	④	③	③	③	②	③	③

1. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도]

원의 방정식의 표준형을 이해하고, 원이 좌표축에 접할 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 원의 방정식 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 36$ 의 중심은 (a, a) 이고 반지름의 길이 r 는 $r = \sqrt{36} = 6$ 입니다.

원인 x 축에 접하기 위한 조건은 원의 중심의 y 좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같은 것입니다.

따라서 $|a| = 6$ 이 성립해야 합니다. 문제에서 양수 a 의 값을 구하라고 하였으므로 $a = 6$ 입니다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

원의 방정식의 일반형을 표준형으로 변환하여 원의 반지름을 구하고, 이를 이용해 원의 넓이를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 원의 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ 을 표준형으로 변환하면 다음과 같다.

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) - 1 - 16 + 8 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

따라서 원의 반지름의 제곱 r^2 은 9 이다.

원의 넓이는 πr^2 이므로, 구하는 넓이는 9π 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 원과 직선이 만날 조건을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

원이 직선과 만나려면 원의 중심에서 직선까지의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다.

원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심은 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $r = 3$ 이다.

직선 $y = 2x + k$ 를 일반형으로 바꾸면 $2x - y + k = 0$ 이다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|2(0) - (0) + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

조건 $d \leq r$ 을 만족해야 하므로, $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 3$ 이다.

따라서 $|k| \leq 3\sqrt{5}$, 즉 $-3\sqrt{5} \leq k \leq 3\sqrt{5}$ 이다.

상수 k 의 최댓값은 $3\sqrt{5}$ 이다.

[정답] ④

4. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 원의 방정식의 정의를 이해하고, 주어진 조건을 이용하여 두 점 사이의 거리의 제곱을 구하는 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점이므로 다음이 성립한다.

$$a^2 + b^2 = 9, c^2 + d^2 = 9$$

구하는 식 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 은 두 점 P 와 Q 사이의 거리의 제곱이다. 식을 전개하면,

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 = (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bd + d^2) = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2(ac + bd)$$

위에서 구한 값과 문제의 조건 $ac + bd = 0$ 을 대입하면,

$$= 9 + 9 - 2(0) = 18$$

[정답] ④

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원의 정의를 이용하여 두 점의 좌표 사이의 관계식을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

두 점 $A(a, 3)$, $B(4, b)$ 가 중심이 원점인 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로

$$a^2 + 3^2 = r^2 \text{ 이고 } 4^2 + b^2 = r^2 \text{ 이다.}$$

따라서 $a^2 + 9 = 16 + b^2$ 이 성립한다.

식을 정리하면 $a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$ 이다.

[정답] ③

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

원의 평행이동을 이해하고, 이동 전후의 원의 중심 좌표를 비교하여 평행이동한 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 원의 방정식을 표준형으로 바꾸어 중심의 좌표를 찾습니다.

원 $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ 의 중심은 점 $(0, 1)$ 입니다.

평행이동한 원의 방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$ 을 표준형으로 바꾸면,

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 8y) = -11$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 = -11$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

이므로, 평행이동한 원의 중심은 점 $(2, 4)$ 입니다.

원의 중심 $(0, 1)$ 이 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하여 점 $(2, 4)$ 가 되었으므로,

$$0 + m = 2, 1 + n = 4 \text{ 입니다.}$$

따라서 $m = 2, n = 3$ 이므로, $m + n = 2 + 3 = 5$ 입니다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원의 방정식과 점을 지나는 직선의 위치 관계를 이용하여, 교점의 개수에 대한 조건을 만족시키는 기울기의 범위를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

직선 $y = m(x + 1)$ 은 기울기 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

점 $(-1, 0)$ 은 원 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로, 양수 m 에 대하여 직선은 원 C_1 과 항상 서로 다른 두 점(하나는 $(-1, 0)$)에서 만난다.

따라서, 직선이 주어진 도형과 서로 다른 네 점에서 만나려면 원 $C_2: (x - 1)^2 + y^2 = 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이는 원 C_2 의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $mx - y + m = 0$ 사이의 거리가 원 C_2 의 반지름 $r = 1$ 보다 작아야 함을 의미한다.

원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $mx - y + m = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|m(1) - 0 + m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

조건 $d < 1$ 을 적용하면, $\frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} < 1$ 이다.

$m > 0$ 이므로, $2m < \sqrt{m^2 + 1}$ 이다.

양변을 제곱하면 $4m^2 < m^2 + 1$, 즉 $3m^2 < 1$ 이므로 $m^2 < \frac{1}{3}$ 이다.

따라서 양수 m 의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

[정답] ③

8. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도]

원의 대칭이동과 평행이동을 이해하고, 이동한 원의 중심 좌표를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 원 $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ 의 중심은 점 $(2, 0)$ 이다.

이 원을 y 축에 대하여 대칭이동하면 중심은 점 $(-2, 0)$ 으로 이동한다.

이어서 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면 중심은 점 $(-2, 0 + k)$, 즉 $(-2, k)$ 로 이동한다.

이동한 원의 중심 $(-2, k)$ 가 직선 $y = x + 1$ 위에 있으므로, $x = -2, y = k$ 를 대입하면 $k = -2 + 1$ 이 성립한다.

따라서 $k = -1$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

평행이동과 대칭이동을 복합적으로 적용하여 도형의 방정식을 구할 수 있고, 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원 $C: (x - a)^2 + y^2 = 25$ 의 중심은 $(a, 0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.

원 C 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 원 C' 의 중심은 $(a + 1, 1)$ 이다.

원 C' 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원 C'' 의 중심은 $(-(a + 1), 1)$ 이다. 원 C'' 의 반지름의 길이는 5 로 변하지 않는다.

원 C'' 이 직선 $3x - 4y + 9 = 0$ 에 접하므로, 원 C'' 의 중심 $(-(a + 1), 1)$ 과 직선 $3x - 4y + 9 = 0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 5 와 같다.

점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면,

$$d = \frac{|3(-a-1) - 4(1) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3a-3-4+9|}{\sqrt{25}} = \frac{|-3a+2|}{5}$$

따라서 $\frac{|-3a+2|}{5} = 5$ 이므로 $|-3a+2| = 25$, 즉 $|3a-2| = 25$ 이다.

$$3a - 2 = 25 \quad \text{또는} \quad 3a - 2 = -25$$

$$3a = 27 \quad \text{또는} \quad 3a = -23$$

$$a = 9 \quad \text{또는} \quad a = -\frac{23}{3}$$

문제의 조건에서 $a > 0$ 이므로, 구하는 a 의 값은 9 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원에 내접하는 사각형의 성질과 삼각형의 넓이, 코사인 법칙을 종합적으로 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제 해결 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 조건에서 $\overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD} = 4 + 2 = 6$ 이다. 원과 두 직선의 성질에 따라 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 가 성립한다. $\overline{PB} = x$ 라 하면 $\overline{PA} = x + 5$ 이므로 $x(x + 5) = 4 \cdot 6 = 24$ 이다. $x^2 + 5x - 24 = 0$ 을 풀면 $(x + 8)(x - 3) = 0$ 이고, $x > 0$ 이므로 $\overline{PB} = 3$ 이고 $\overline{PA} = 8$ 이다.

원에 내접하는 사각형의 성질에 의해 $\angle PAD = \angle PCB$ 이고, $\angle P$ 는 공통이므로 삼각형 PDA 와 삼각형 PBC 는 서로 닮음이다. 닮음비는 $\overline{PA} : \overline{PC} = 8 : 4 = 2 : 1$ 이다. 따라서 넓이의 비는 $2^2 : 1^2 = 4 : 1$ 이다. 삼각형 APD 의 넓이가 $9\sqrt{7}$ 이므로, 삼각형 PBC 의 넓이는

$\frac{1}{4} \times 9\sqrt{7} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ 이다. $\angle BPC = \theta$ 라 하면 삼각형 PBC 의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin \theta = 6 \sin \theta$ 이다. 따라서 $6 \sin \theta = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ 에서 $\sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ 이다. $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{8}$ 이다.

삼각형 PBC 에서 코사인 법칙을 이용하면, $\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - 2(\overline{PB})(\overline{PC})\cos \theta$ 이므로 $\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 9 + 16 - 3 = 22$ 이다. 그러므로 $\overline{BC} = \sqrt{22}$ 이다.
