

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
①	③	④	③	②	③	①	③	④	③

1. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도]

두 점의 좌표가 주어졌을 때, 직선의 기울기를 정의에 따라 정확하게 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 입니다.

주어진 두 점 $(1, 5)$ 와 $(3, -1)$ 을 대입하면, 직선의 기울기는 $\frac{-1-5}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$ 입니다.

따라서 구하는 직선의 기울기는 -3 입니다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

세 점 A , B , C 가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB 의 기울기와 직선 BC 의 기울기가 같아야 한다.

직선 AB 의 기울기는 $\frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$ 이다.

직선 BC 의 기울기는 $\frac{k-6}{4-3} = k-6$ 이다.

두 직선의 기울기가 같아야 하므로 $k-6=2$ 이다.

따라서 $k=8$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도]

좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 이등변삼각형의 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건은 $\overline{OA} = \overline{AB}$ 이므로, 양변을 제곱한 $\overline{OA}^2 = \overline{AB}^2$ 도 성립한다.

두 점 사이의 거리 공식에 의해 각 선분의 길이의 제곱은 다음과 같다.

$$\overline{OA}^2 = (2-0)^2 + (4-0)^2 = 4 + 16 = 20$$

$$\overline{AB}^2 = (a-2)^2 + (0-4)^2 = (a-2)^2 + 16$$

$$\overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 \text{ 에서 } 20 = (a-2)^2 + 16 \text{ 이므로 } (a-2)^2 = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 $a-2=2$ 또는 $a-2=-2$ 이므로, $a=4$ 또는 $a=0$ 이다.

문제에서 a 는 양수라고 하였으므로 $a=4$ 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

두 점 사이의 거리 공식에 의해 선분 AC 와 BC 의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 16}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(a-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + 4}$$

문제의 조건에서 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이다.

$$(a-1)^2 + 16 = (a-3)^2 + 4$$

$$a^2 - 2a + 1 + 16 = a^2 - 6a + 9 + 4$$

$$a^2 - 2a + 17 = a^2 - 6a + 13$$

$$4a = -4$$

따라서 $a = -1$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각형의 무게중심 좌표를 구하고, 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC 의 세 꼭짓점은 $A(-1, 2)$, $B(5, 3)$, $C(-1, 1)$ 이다.

무게중심 G 의 좌표는 $G(\frac{-1+5+(-1)}{3}, \frac{2+3+1}{3})$ 이므로 $G(1, 2)$ 이다.

따라서 원점 O 와 점 G 사이의 거리 OG 는 다음과 같다.

$$OG = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

[정답]

②

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 좌표평면에서 두 선분의 수직 조건을 이용하여 직선 위의 점의 좌표를 구하고, 두 점 사이의 거리를 계산하는 문제입니다.

[풀이]

점 P 는 직선 $y = x$ 위의 점이므로 좌표를 (a, a) 로 놓을 수 있습니다. 문제의 조건에서 점 P 는 원점이 아니므로 $a \neq 0$ 입니다.

선분 OP 와 선분 AP 가 서로 수직이므로 두 선분의 기울기의 곱은 -1 입니다. 선분 OP 의 기울기는 $\frac{a-0}{a-0} = 1$ 입니다. 선분 AP 의 기울기는 $\frac{a-1}{a-5}$ 입니다. (단, $a \neq 5$)

두 기울기의 곱이 -1 이므로 $1 \times \frac{a-1}{a-5} = -1$ 에서 $a-1 = -(a-5)$, 즉 $a-1 = -a+5$ 입니다. 이 식을 정리하면 $2a = 6$ 이므로 $a = 3$ 입니다. 따라서 점 P 의 좌표는 $(3, 3)$ 입니다.

구하는 값은 선분 OP 의 길이의 제곱이므로 $OP^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$ 입니다.

[3점]

7. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 점의 대칭이동을 이용하여 두 선분의 길이의 합의 최소값을 구하고, 삼각형의 무게중심 좌표 공식을 이용하여 미지점의 좌표를 구해 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 $A(-2, 1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(2, 1)$ 이다. $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소일 때는 점 P 가 선분 $A'B$ 위에 있을 때이므로, 점 P_0 는 직선 $A'B$ 와 y 축의 교점이다. 두 점 $A'(2, 1)$, $B(4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y - 1 = \frac{4-1}{4-2}(x - 2)$ 이므로 $y = \frac{3}{2}x - 2$ 이다. 이 직선의 y 절편은 -2 이므로 P_0 의 좌표는 $(0, -2)$ 이다.

점 C 의 좌표를 (x, y) 라 하자. 삼각형 CP_0B 의 무게중심의 좌표가 $(1, 1)$ 이므로 무게중심 공식에 의해 $\frac{x+0+4}{3} = 1$, $\frac{y-2+4}{3} = 1$ 이다. 따라서 $x + 4 = 3$ 에서 $x = -1$ 이고, $y + 2 = 3$ 에서 $y = 1$ 이므로 점 C 의 좌표는 $(-1, 1)$ 이다.

두 점 $A(-2, 1)$ 과 $C(-1, 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{\{-1 - (-2)\}^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 만든 변수에 대한 이차식의 최솟값을 구하는 조건을 찾을 수 있는지 평가한다.

[풀이]

x 축 위의 점 P 의 좌표는 $(a, 0)$ 이고, 주어진 두 점은 $A(1, 2)$, $B(5, 4)$ 이다.

두 점 사이의 거리 공식에 의해 $\overline{AP}^2$ 과 $\overline{BP}^2$ 을 a 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\overline{AP}^2 = (a - 1)^2 + (0 - 2)^2 = a^2 - 2a + 1 + 4 = a^2 - 2a + 5$$

$$\overline{BP}^2 = (a - 5)^2 + (0 - 4)^2 = a^2 - 10a + 25 + 16 = a^2 - 10a + 41$$

따라서 두 식의 합은 다음과 같다.

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a^2 - 2a + 5) + (a^2 - 10a + 41) = 2a^2 - 12a + 46$$

이 식을 a 에 대한 이차함수 $f(a)$ 로 생각하고 표준형으로 바꾸면,

$$f(a) = 2(a^2 - 6a) + 46 = 2(a - 3)^2 - 18 + 46 = 2(a - 3)^2 + 28$$

이차함수 $f(a)$ 는 아래로 볼록한 포물선이므로, 꼭짓점의 a 좌표인 $a = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다.

그러므로 구하는 실수 a 의 값은 3 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도]

선분의 내분점과 외분점 공식을 이해하고, 이를 직선의 방정식과 연계하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 $A(a, -1)$, $B(2, 5)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:1 로 내분하는 점 P 의 좌표는 $(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot a}{2+1}, \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)}{2+1}) = (\frac{4+a}{3}, 3)$ 이다.

점 P 가 직선 $y = x + 1$ 위에 있으므로 $3 = \frac{4+a}{3} + 1$ 이고, 식을 정리하면 $a = 2$ 이다.

따라서 점 A 의 좌표는 $(2, -1)$ 이다.

두 점 $A(2, -1)$, $B(2, 5)$ 에 대하여 선분 AB 를 3:2 로 외분하는 점 $Q(p, q)$ 의 좌표는 다음과 같다.

$$p = \frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{3-2} = 2$$

$$q = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)}{3-2} = 17$$

따라서 구하는 값은 $p + q = 2 + 17 = 19$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]

삼각형의 각의 이등분선 정리를 이해하고, 이를 활용하여 두 점 사이의 거리와 선분의 내분점 공식을 적용하여 문제에서 요구하는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점이 D 이므로, 각의 이등분선 정리에 의해 $AB : AC = BD : DC$ 가 성립한다. 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 선분 AB 와 AC 의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$AB = \sqrt{(11-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10$$

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

따라서 $BD : DC = AB : AC = 10 : 5 = 2 : 1$ 이다.

즉, 점 D 는 선분 BC 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

점 $B(11, 1)$ 과 $C(4, 5)$ 에 대하여 선분 BC 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점 D 의 좌표는

$$D\left(\frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 11}{2+1}, \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 1}{2+1}\right) = D\left(\frac{8+11}{3}, \frac{10+1}{3}\right) = D\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}\right) \text{ 이다.}$$

그러므로 점 D 의 좌표는 $\left(\frac{19}{3}, \frac{11}{3}\right)$ 이다.