MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사 대비 시험 01 정답 및 풀이

ID : MG-H2-2610-01-SOL 출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	②	②	①	③	②	③	③	③

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	③	③	③	③	③	③	③	③

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	16	6	24	2	28	110	18	30	184

---

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 미지수를 포함한 등식을 만족시키는 상수의 값을 구한다.

[풀이] 주어진 등식 $(\sqrt[4]{a^3})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{a^k} = a^2$ 의 좌변을 지수법칙을 이용하여 정리한다. 좌변은 $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{k}{4}} = a^{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}} \times a^{\frac{k}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{k}{4}} = a^{\frac{1+k}{4}}$ 이다. 따라서 $a^{\frac{1+k}{4}} = a^2$ 이 성립해야 하므로 양변의 지수를 비교하면 $\frac{1+k}{4} = 2$ 이다. 이 식을 풀면 $1+k=8$ 이므로 $k=7$ 이다.

---

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

미분계수의 정의에 의해

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

이다.

주어진 극한 식을 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{3h} \times 3 = 3f'(2)$$

$3f'(2)=12$ 이므로 $f'(2)=4$ 이고, 문제의 조건에서 $f'(2)=k$ 이므로 $k=4$ 이다.

---

3. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 주기에 대한 공식을 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수 $y=\tan(bx)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$ 이다. 주어진 함수 $y=\tan(ax)$ 는 $a>0$ 이므로 주기는 $\frac{\pi}{a}$ 이다. 문제의 조건에서 주기가 3이므로 $\frac{\pi}{a}=3$ 이다. 따라서 $a=\frac{\pi}{3}$ 이다.

---

4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 함수의 우극한과 간단한 치환을 이용한 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 각 극한값을 구한다.

$x \to 2+$ 일 때 $x > 2$ 이므로 $f(x) = x^2 - 5$ 이다.

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 - 5) = 2^2 - 5 = -1$

$\lim_{x \to -2+} f(-x)$ 에서 $t = -x$ 로 치환하면 $x \to -2+$ 일 때 $t \to 2-$ 이다.

$t \to 2-$ 일 때 $t < 2$ 이므로 $f(t) = -t + 2$ 이다.

$\lim_{x \to -2+} f(-x) = \lim_{t \to 2-} f(t) = \lim_{t \to 2-} (-t + 2) = -2 + 2 = 0$

따라서 구하는 값은 두 극한값의 합이므로 $-1 + 0 = -1$ 이다.

---

5. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 삼각함수의 정의와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 특정 사분면에서 다른 삼각함수의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 조건에서 $\sin\theta > 0$ 이고 $\cos\theta < 0$ 이므로, 각 θ 는 제2사분면의 각이다.

삼각함수 사이의 관계식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 을 이용하면,

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (\frac{1}{4})^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ 이다.

$\cos\theta < 0$ 이므로 $\cos\theta = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-\sqrt{15}/4}{1/4} = -\sqrt{15}$ 이다.

---

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 미분가능성 조건을 이용하여 미정계수를 구하고 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로 $x = 1$ 에서의 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다. $x > 1$ 에서 $f(x) = 2x^2 + f'(1)$ 이므로 $f'(x) = 4x$ 이다. 따라서 $x = 1$ 에서의 우미분계수는 $\lim_{x \to 1+} f'(x) = 4$ 이고, 이 값이 $f'(1)$ 이 된다. 즉, $f'(1) = 4$ 이다.

$x < 1$ 에서 $f'(x) = 3ax^2 + b$ 이므로 $x = 1$ 에서의 좌미분계수는 $\lim_{x \to 1-} f'(x) = 3a + b$ 이다. 미분가능 조건에 의해 $3a + b = 4$ 이다.

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$ 이다. $f(1) = a + b$ 이고, $\lim_{x \to 1+} (2x^2 + f'(1)) = 2(1)^2 + 4 = 6$ 이므로 $a + b = 6$ 이다.

연립방정식

$$\begin{cases} 3a + b = 4 \\ a + b = 6 \end{cases}$$

을 풀면, 두 식을 변끼리 빼서 $2a = -2$, 즉 $a = -1$ 을 얻는다. 이를 $a + b = 6$ 에 대입하면 $b = 7$ 이다. 따라서 구하는 값은 $b - a = 7 - (-1) = 8$ 이다.

MathGenix 2026년 12월 10월 모의고사

7. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 도함수가 주어진 삼차함수의 극댓값을 이용하여 극솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$ 이다. $f'(x)=0$ 이 되는 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소이다. 문제의 조건에서 극댓값이 10 이므로 $f(-1)=10$ 이다.

$$f(x)=\int(6x^2-6x-12)dx=2x^3-3x^2-12x+C$$

(단, C 는 적분상수)이다. $f(-1)=-2-3+12+C=7+C=10$ 이므로 $C=3$ 이다.

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+3$ 이고, 구하는 극솟값은 $f(2)$ 이다. $f(2)=2(2)^3-3(2)^2-12(2)+3=16-12-24+3=-17$ 이다.

---

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식과 성질을 이용하여 로그 방정식을 풀고, 근과 계수의 관계를 통해 해의 곱을 구하는 문제입니다.

[풀이]

주어진 등식에서 로그의 밑 변환 공식에 의해 $\log_a 2=\frac{1}{\log_2 a}$ 입니다.

$X=\log_2 a$ 로 치환하면, 주어진 등식은 $X-\frac{4}{X}=3$ 입니다. (단, $a\neq 1$ 이므로 $X\neq 0$)

양변에 X 를 곱하여 정리하면 $X^2-4=3X$, 즉 $X^2-3X-4=0$ 입니다.

이 이차방정식의 두 근을 α,β 라고 할 때, 이 두 근은 주어진 등식을 만족시키는 a 의 값 a_1,a_2 에 대하여 각각 $\alpha=\log_2 a_1$, $\beta=\log_2 a_2$ 가 됩니다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\alpha+\beta=3$ 입니다.

따라서 $\log_2 a_1+\log_2 a_2=\log_2(a_1a_2)=3$ 입니다.

구하고자 하는 모든 양수 a 의 값의 곱은 $a_1a_2=2^3=8$ 입니다. [3점]

---

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그함수의 단조성을 이용하여 주어진 구간에서의 최댓값 조건으로 미지수를 구하고, 이를 통해 최솟값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-a)$ 는 밑이 $\frac{1}{2}$ 이고 $0<\frac{1}{2}<1$ 이므로, x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하는 함수이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[3,9]$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=9$ 일 때 최솟값을 갖는다.

주어진 조건에서 최댓값은 -2 이므로 $f(3)=\log_{\frac{1}{2}}(2\times 3-a)=\log_{\frac{1}{2}}(6-a)=-2$ 이다.

로그의 정의에 의하여 $6-a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$ 이므로 $a=2$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(9)=\log_{\frac{1}{2}}(2\times 9-2)=\log_{\frac{1}{2}}(16)=\log_{2^{-1}}(2^4)=-4$ 이다.

MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수에서 정적분 값을 상수로 취급하여 함수를 구하고 함숫값을 계산할 수 있다.

[풀이]

$$\int_0^2 f'(t)dt$$

는 상수이므로 이 값을 k 라 하면, $f(x)=3x^2+kx$ 로 놓을 수 있다.

이때 함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x)=6x+k$ 이다. 이 식을 k 의 정의에 대입하면

$$k=\int_0^2 (6t+k)dt$$

이다.

$k=[3t^2+kt]_0^2=(3\cdot 2^2+k\cdot 2)-0=12+2k$ 에서 $-k=12$ 이므로 $k=-12$ 이다.

따라서 $f(x)=3x^2-12x$ 이므로, 구하는 값은 $f(1)=3(1)^2-12(1)=-9$ 이다.

---

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그부등식의 해를 구할 수 있다.

[풀이]

진수 조건에 의해 $(x-2)^2>0$ 이고 $x-2>0$ 이므로, $x\neq 2$ 이고 $x>2$ 이다. 따라서 $x>2$ 이다.

주어진 부등식에서 $\log_3((x-2)^2)=2\log_3(x-2)$ 이므로, 부등식은 $2\log_3(x-2)<1+\log_3(x-2)$ 와 같다.

정리하면 $\log_3(x-2)<1$ 이고, $1=\log_3 3$ 이므로 $\log_3(x-2)<\log_3 3$ 이다.

로그의 밑이 1보다 크므로 부등호의 방향이 유지되어 $x-2<3$, 즉 $x<5$ 이다.

진수 조건 $x>2$ 와 부등식의 해 $x<5$ 의 공통 범위를 구하면 $2<x<5$ 이다.

따라서 $\alpha=2, \beta=5$ 이므로 $\alpha+\beta=2+5=7$ 이다.

---

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있다.

[풀이] 수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 홀수 항과 짝수 항의 일반항을 각각 구한다. $n\geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}$$

이므로, $a_{2n-1}=(n^2+2n)-\{(n-1)^2+2(n-1)\}=(n^2+2n)-(n^2-1)=2n+1$ 이다. $n=1$ 일 때 $a_1=1^2+2(1)=3$ 이고, $2n+1$ 에 $n=1$ 을 대입하면 3 이므로 $a_{2n-1}=2n+1$ 은 모든 자연수 n 에 대해 성립한다. 같은 방법으로 $n\geq 2$ 일 때

$$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}$$

이므로, $a_{2n}=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}=(n^2-n)-(n^2-3n+2)=2n-2$ 이다. $n=1$ 일 때 $a_2=1^2-1=0$ 이고, $2n-2$ 에 $n=1$ 을 대입하면 0 이므로 $a_{2n}=2n-2$ 는 모든 자연수 n 에 대해 성립한다. 구하는 값은 a_7+a_8 이다. a_7 은 일반항 a_{2n-1} 에서 $2n-1=7$, 즉 $n=4$ 일 때이므로 $a_7=2(4)+1=9$ 이다. a_8 은 일반항 a_{2n} 에서 $2n=8$, 즉 $n=4$ 일 때이므로 $a_8=2(4)-2=6$ 이다. 따라서 $a_7+a_8=9+6=15$ 이다.

MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 합과 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1 이고 공차가 4 이므로 일반항은 $a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$ 이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (4k - 3) = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n = n(2n-1)$$

이다.

문제의 조건에서

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n b_n$$

이므로, $n(2n-1) = n b_n$ 이다. 이 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로 $b_n = 2n - 1$ 이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{10} (2k-1) = 2\sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 \times 1 = 110 - 10 = 100$$

이다.

---

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 연속성과 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 결정하고 특정 지점에서의 함숫값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

(나) 조건 $f(0) = 3$ 을 (가)의 식에 $x = 0$ 을 대입하여 적용하면 $(\sqrt{0+1} - 2) f(0) = 0 \cdot \sqrt{0+1} + a \cdot 0 + b$ 이므로 $(1-2) \times 3 = b$ 에서 $b = -3$ 을 얻는다.

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 3$ 에서도 연속이다. 따라서 $f(3) = \lim_{x \to 3} f(x)$ 이다. $x \to 3$ 일 때 식 $(\sqrt{x+1} - 2) f(x)$ 의 극한값이 존재하고 $\lim_{x \to 3} (\sqrt{x+1} - 2) = 0$ 이므로, $\lim_{x \to 3} (x\sqrt{x+1} + ax + b) = 0$ 이어야 한다. $3\sqrt{3+1} + 3a - 3 = 3 \cdot 2 + 3a - 3 = 3a + 3 = 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.

$f(3)$ 의 값을 구하기 위해 극한을 계산하면 다음과 같다.

$$f(3) = \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \to 3} \frac{x(\sqrt{x+1} - 2) + 2x - x - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(x + \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \right) = \lim_{x \to 3} \left(x + \frac{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(x + \frac{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x - 3} \right) = \lim_{x \to 3} (x + \sqrt{x+1} + 2)$$

$= 3 + \sqrt{3+1} + 2 = 3 + 2 + 2 = 7$ 이다.

따라서 $f(3) = 7$ 이다.

MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 거듭제곱근의 정의와 코사인 함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 찾는 능력을 평가한다.

[풀이]

$g(n)$ 은 $\cos\frac{n\pi}{4}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수이다. $g(n)=1$ 이 되는 경우는 다음 두 가지이다.

(i) n 이 홀수일 때, $\cos\frac{n\pi}{4}$ 의 값에 관계없이 실수인 n 제곱근은 항상 1개이다.

(ii) n 이 짝수일 때, $\cos\frac{n\pi}{4}=0$ 일 때만 실수인 n 제곱근이 1개이다.

n 은 2 이상 15 이하의 자연수이다.

(i)에 해당하는 홀수 n 은 $3,5,7,9,11,13,15$ 이다. 이 값들의 합은 $\frac{7(3+15)}{2}=63$ 이다.

(ii)에 해당하는 짝수 n 을 찾기 위해 $\cos\frac{n\pi}{4}=0$ 인 조건을 확인한다. 이는 $\frac{n\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, k 는 정수)일 때 성립하므로, $n=4k+2$ 꼴의 짝수이다.

주어진 범위에서 해당하는 n 은 $k=0,1,2,3$ 일 때의 $2,6,10,14$ 이다.

이 값들의 합은 $2+6+10+14=32$ 이다.

따라서 $g(n)=1$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은 (i)과 (ii)의 합이므로 $63+32=95$ 이다.

---

16. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그함수의 그래프와 직선의 교점을 이용하여 정의된 함수의 극한값을 미분계수의 정의를 활용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 방정식 $|\log_2(k/x)|=t$ 에서 $\log_2(k/x)=\pm t$ 이므로 $k/x=2^{\pm t}$ 이다. 따라서 $x=k\cdot 2^{-t}$ 또는 $x=k\cdot 2^{t}$ 이다. 조건에서 $\alpha<\beta$ 이므로 $\alpha=k\cdot 2^{-t}$, $\beta=k\cdot 2^{t}$ 이다. 삼각형 OPQ 의 밑변의 길이는 $\beta-\alpha=k(2^t-2^{-t})$ 이고 높이는 t 이므로 넓이 $S(t)$ 는 $S(t)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)t=\frac{1}{2}k(2^t-2^{-t})t$ 이다. 문제에서 주어진 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{k(2^t-2^{-t})t}{2t^2}=\frac{k}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{2^t-2^{-t}}{t}$$

. $f(t)=2^t-2^{-t}$ 라 하면 $f(0)=0$ 이므로, 위 극한은 미분계수의 정의에 의해 $\frac{k}{2}f'(0)$ 과 같다.

$f'(t)=2^t\ln 2-2^{-t}(-\ln 2)=(2^t+2^{-t})\ln 2$ 이므로 $f'(0)=(1+1)\ln 2=2\ln 2$ 이다. 따라서 극한값은 $\frac{k}{2}\cdot 2\ln 2=k\ln 2$ 이다. 주어진 조건에서 $k\ln 2=8\ln 2$ 이므로, $k=8$ 이다.

---

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 일반항, 합과 등비중항의 성질을 이용하여 수열의 특정 항을 구할 수 있다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a_1 , 공차를 d 라 하자. 세 항 a_1, a_5, a_8 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항의 성질에 따라 $a_5^2=a_1a_8$ 이 성립한다. 이를 a_1 과 d 로 표현하면 $(a_1+4d)^2=a_1(a_1+7d)$ 이다.

$a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+7a_1d$ 에서 $a_1d+16d^2=0$, 즉 $d(a_1+16d)=0$ 이다. 문제의 조건에서 공차 d 는 0 이 아닌 정수이므로 $d\neq 0$ 이고, $a_1+16d=0$ 에서 $a_1=-16d$ 이다. a_1 이 자연수이므로 공차 d 는 음의 정수임을 알 수 있다.

첫째항부터 제5항까지의 합 $S_5=\frac{5(2a_1+(5-1)d)}{2}=\frac{5(2a_1+4d)}{2}=5(a_1+2d)$ 이다. $S_5=70$ 이므로 $5(a_1+2d)=70$, 즉 $a_1+2d=14$ 이다. 이 식에 $a_1=-16d$ 를 대입하면 $-16d+2d=14$, $-14d=14$ 이므로 $d=-1$ 이다. 따라서 $a_1=-16(-1)=16$ 이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=16+(n-1)(-1)=17-n$ 이다.

구하는 값은 $a_{10}=17-10=7$ 이다. [4점]

MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 파악하고, 좌표평면 위 점들의 기하학적 성질을 이용하여 함수식의 미정계수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

직선 $l : y = 3x + 1$ 이 y 축과 만나는 점 D의 좌표는 $(0, 1)$ 이다. 점 A의 좌표를 $(x_A, 3x_A + 1)$ 이라 하자. 두 함수 $y = a^x + k$ 와 $y = \log_a(x - k)$ 는 서로 역함수 관계이므로 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = g(x)$ 와 만나는 점이 C이므로, 점 C는 점 A를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다. 따라서 C의 좌표는 $(3x_A + 1, x_A)$ 이다.

삼각형 ADC의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_A(x_A - 1) + (3x_A + 1)(1 - 1) + 0(3x_A + 1 - x_A)|$ 에서, 세 꼭짓점 $A(x_A, 3x_A + 1)$, $C(3x_A + 1, x_A)$, $D(0, 1)$ 을 이용하여 계산하면

$\frac{1}{2}|(x_A^2 + 3x_A + 1) - (9x_A^2 + 7x_A + 1)| = \frac{1}{2}|-8x_A^2 - 4x_A| = |4x_A^2 + 2x_A|$ 이다. 넓이가 6이므로 $|2x_A^2 + x_A| = 3$ 이다.

$2x_A^2 + x_A - 3 = 0$ 또는 $2x_A^2 + x_A + 3 = 0$ 이다. $2x_A^2 + x_A + 3 = 0$ 의 판별식은 $1 - 24 = -23 < 0$ 이므로 실근이 없다.

$(2x_A + 3)(x_A - 1) = 0$ 에서 $x_A = 1$ 또는 $x_A = -\frac{3}{2}$ 이다.

점 B의 좌표를 $(x_B, 3x_B + 1)$ 이라 하면, $\overline{BD}^2 = (x_B - 0)^2 + (3x_B + 1 - 1)^2 = x_B^2 + 9x_B^2 = 10x_B^2$ 이다. $\overline{BD} = 3\sqrt{10}$ 이므로 $10x_B^2 = 90$ 에서 $x_B^2 = 9$, 즉 $x_B = \pm 3$ 이다. $x_A < x_B$ 이므로, $x_A = 1$ 일 때 $x_B = 3$ 이고, $x_A = -3/2$ 일 때 $x_B = 3$ 이다.

(i) $A = (1, 4)$, $B = (3, 10)$ 일 때: 두 점이 $y = a^x + k$ 위에 있으므로 $4 = a + k$, $10 = a^3 + k$ 이다. 두 식을 빼면 $6 = a^3 - a$ 이고 $a^3 - a - 6 = 0$, $(a - 2)(a^2 + 2a + 3) = 0$ 이다. $a > 1$ 이므로 $a = 2$ 이고, $k = 4 - 2 = 2$ 이다. 이는 $k > 0$ 조건을 만족한다.

(ii) $A = (-3/2, -7/2)$, $B = (3, 10)$ 일 때: $-7/2 = a^{-3/2} + k$, $10 = a^3 + k$ 이다. 두 식을 빼면 $27/2 = a^3 - a^{-3/2}$ 이다. $k = 10 - a^3 = 10 - (27/2 + a^{-3/2}) = -7/2 - a^{-3/2}$ 이다. $a > 1$ 이므로 $k < 0$ 이 되어 조건에 맞지 않다.

따라서 $a = 2, k = 2$ 이므로 $a \times k = 4$ 이다.

---

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차함수의 그래프와 극값의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

함수 $f(x) = -x^3 + 3k^2x + 2$ 의 도함수는 $f'(x) = -3x^2 + 3k^2 = -3(x - k)(x + k)$ 이다. 양수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 극댓값, $x = -k$ 에서 극솟값을 갖는다.

극댓값은 $f(k) = -k^3 + 3k^3 + 2 = 2k^3 + 2$ 이고, 극솟값은 $f(-k) = k^3 - 3k^3 + 2 = -2k^3 + 2$ 이다.

a_n 은 직선 $y = 2n$ 과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 개수이고, 조건은

$$\sum_{n=1}^{4} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 9$$

이다.

$k > 0$ 이므로 극솟값 $f(-k) = 2 - 2k^3 < 2$ 이고 극댓값 $f(k) = 2 + 2k^3 > 2$ 이다. 따라서 직선 $y = 2$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 항상 서로 다른 세 점에서 만나므로 $a_1 = 3$ 이다.

주어진 조건에 $a_1 = 3$ 을 대입하면 $a_2 + a_3 + a_4 = 6$ 이다.

n 이 커질수록 직선 $y = 2n$ 은 위로 움직이므로 교점의 개수인 수열 $\{a_n\}$ ($n \geq 2$)은 감소하거나 일정하다. a_n 이 가질 수 있는 값은 $1, 2, 3$ 이므로, $a_2 + a_3 + a_4 = 6$ 을 만족시키는 순서쌍 (a_2, a_3, a_4) 는 $(3, 2, 1)$ 이다.

$a_2 = 3$ 이므로 직선 $y = 4$ 는 극댓값보다 아래에 있어야 한다. 즉, $4 < f(k) = 2k^3 + 2$ 에서 $2k^3 > 2$, $k^3 > 1$ 이다.

$a_3 = 2$ 이므로 직선 $y = 6$ 은 곡선 $y = f(x)$ 에 접해야 한다. $y = 6$ 은 극댓값과 같아야 하므로 $f(k) = 2k^3 + 2 = 6$ 이다. 따라서 $2k^3 = 4$ 이므로 $k^3 = 2$ 이다.

$a_4 = 1$ 이므로 직선 $y = 8$ 은 극댓값보다 위에 있어야 한다. 즉, $8 > f(k) = 2k^3 + 2$ 이다. $k^3 = 2$ 를 대입하면 $8 > 2(2) + 2 = 6$ 이므로 이 조건도 만족시킨다.

따라서 모든 조건을 만족시키는 k^3 의 값은 2 이다.

---

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 주어진 조건을 연립하여 특정 항의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

조건 (가)에서 $a_1 \neq 0$ 이고 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 이므로, $a_1(a_1 r^{n+1}) = 2(a_1 r^{n-1})$ 이다. $a_1 \neq 0$ 이므로 양변을 a_1 으로 나누고, 모든 항이 0이 아닌 등비수열에서 $r \neq 0$ 이므로 양변을 r^{n-1} 으로 나누면 $a_1 r^2 = 2$ 를 얻는다.

조건 (나)에서 $a_1^2 - a_2^2 = a_1^2 - (a_1 r)^2 = a_1^2(1 - r^2) = 3$ 이다. $r^2 = 2/a_1$ 을 이 식에 대입하면, $a_1^2(1 - 2/a_1) = 3$ 이므로 $a_1^2 - 2a_1 = 3$ 이다.

따라서 $a_1^2 - 2a_1 - 3 = 0$, 즉 $(a_1 - 3)(a_1 + 1) = 0$ 이므로 $a_1 = 3$ 또는 $a_1 = -1$ 이다.

$a_1 = -1$ 일 경우 $r^2 = 2/(-1) = -2$ 가 되어 실근이 존재하지 않는다. 그러므로 $a_1 = 3$ 이고, 이때 $r^2 = 2/3$ 이다. 조건 (나)에서 $a_2 > 0$ 이고 $a_2 = a_1 r = 3r$ 이므로 $r > 0$ 이어야 한다. 따라서 구하는 값은 $a_5 = a_1 r^4 = a_1 (r^2)^2 = 3 \times (2/3)^2 = 3 \times 4/9 = 4/3$ 이다.

---

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 조건에 따라 다르게 정의된 수열의 귀납적 정의를 이해하고, 주어진 조건을 만족시키는 첫째항의 값을 추론할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건 $a_3 + a_4 = 10$ 을 a_3 의 값의 범위에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a_3 > 5$ 일 때

$a_4 = a_3 - 4$ 이므로 $a_3 + (a_3 - 4) = 10$ 에서 $2a_3 = 14$, 즉 $a_3 = 7$ 이다. 이는 $a_3 > 5$ 를 만족시킨다.

첫째항 a_1 부터 경우를 나누어 $a_3 = 7$ 이 되는 a_1 을 찾는다.

• $a_1 > 5$ 이면 $a_2 = a_1 - 4$ 이다.

- $a_2 > 5$ (즉, $a_1 > 9$)이면 $a_3 = a_2 - 4 = (a_1 - 4) - 4 = a_1 - 8$ 이다. $a_1 - 8 = 7$ 에서 $a_1 = 15$ 이다. ($15 > 9$ 이므로 성립)

- $a_2 \leq 5$ (즉, $5 < a_1 \leq 9$)이면 $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = \frac{1}{2}(a_1 - 4 + a_1) = a_1 - 2$ 이다. $a_1 - 2 = 7$ 에서 $a_1 = 9$ 이다. ($5 < 9 \leq 9$ 이므로 성립)

• $a_1 \leq 5$ 이면 $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1$ 이고, $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = a_1$ 이다. $a_1 = 7$ 은 $a_1 \leq 5$ 에 모순이다.

(ii) $a_3 \leq 5$ 일 때

$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1)$ 이므로 $a_3 + \frac{1}{2}(a_3 + a_1) = 10$ 에서 $3a_3 = 20 - a_1$, 즉 $a_3 = \frac{20 - a_1}{3}$ 이다. 조건 $a_3 \leq 5$ 에서 $\frac{20 - a_1}{3} \leq 5$ 이므로 $a_1 \geq 5$ 이다.

첫째항 a_1 부터 경우를 나누어 $a_3 = \frac{20 - a_1}{3}$ 이 되는 a_1 을 찾는다.

• $a_1 > 5$ 이면 $a_2 = a_1 - 4$ 이다.

- $a_2 > 5$ (즉, $a_1 > 9$)이면 $a_3 = a_1 - 8$ 이다. $a_1 - 8 = \frac{20 - a_1}{3}$ 에서 $3a_1 - 24 = 20 - a_1$ 이므로 $4a_1 = 44$, $a_1 = 11$ 이다. ($11 > 9$ 이므로 성립)

- $a_2 \leq 5$ (즉, $5 < a_1 \leq 9$)이면 $a_3 = a_1 - 2$ 이다. $a_1 - 2 = \frac{20 - a_1}{3}$ 에서 $3a_1 - 6 = 20 - a_1$ 이므로 $4a_1 = 26$, $a_1 = \frac{13}{2}$ 이다. (정수 조건에 맞지 않음)

• $a_1 = 5$ 이면 $a_2 = \frac{1}{2}(5 + 5) = 5$ 이고 $a_3 = \frac{1}{2}(5 + 5) = 5$ 이다. $a_3 = \frac{20 - 5}{3} = 5$ 이므로 성립한다.

따라서 가능한 모든 a_1 의 값은 $5, 9, 11, 15$ 이다.

모든 a_1 의 값의 합은 $5 + 9 + 11 + 15 = 40$ 이다.

[4점]

MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사

22. 정답 및 풀이

정답: 16

[출제의도] $\frac{0}{0}$ 꼴의 무리함수를 포함한 극한값의 성질을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$x \to 0$ 일 때 분모의 극한값이 0 이고 전체 극한값이 존재하므로, 분자의 극한값도 0 이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{ax+b}-2)=\sqrt{b}-2=0$ 에서 $b=4$ 이다.

주어진 식에 $b=4$ 를 대입하고 분자를 유리화하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}$$

위 식의 극한값은 $\frac{a}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{a}{4}$ 이므로, $\frac{a}{4}=3$ 에서 $a=12$ 이다.

따라서 $a+b=12+4=16$ 이다.

---

23. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 부채꼴의 중심각, 넓이, 호의 길이 사이의 관계를 이용하여 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 넓이 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 이므로, 주어진 조건에 따라 $24\pi=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{3}{4}\pi$ 이다.

위 식에서 $r^2=24\cdot\frac{8}{3}=64$ 이고, $r>0$ 이므로 $r=8$ 이다.

부채꼴의 호의 길이는 $l=r\theta$ 이므로 $l=8\cdot\frac{3}{4}\pi=6\pi$ 이다.

따라서 $k\pi=6\pi$ 이므로 $k=6$ 이다.

---

24. 정답 및 풀이

정답: 24

[출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 다항함수의 식을 구하고, 함숫값을 계산할 수 있다.

[풀이]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3x^3}{x^2}=5$$

에서 $x\to\infty$ 일 때 극한값이 존재하므로, 분자 $f(x)+3x^3$ 은 최고차항의 계수가 5인 이차식이어야 한다. 따라서 다항함수 $f(x)$ 는 $f(x)=-3x^3+5x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)의 꼴이다.

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-4$$

에서 $x\to -1$ 일 때 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. 즉, $\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)=0$ 이다.

$f(-1)=-3(-1)^3+5(-1)^2+a(-1)+b=3+5-a+b=0$ 이므로, $a-b=8$ 이다.

또한,

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=-4$$

이다.

$f'(x)=-9x^2+10x+a$ 이므로 $f'(-1)=-9-10+a=a-19$ 이다.

$a-19=-4$ 에서 $a=15$ 이고, 이를 $a-b=8$ 에 대입하면 $15-b=8$ 이므로 $b=7$ 이다.

MathGenix 2026년 고2 10월 모의고사

따라서 $f(x)=-3x^3+5x^2+15x+7$ 이다.
구하는 값은 $f(1)=-3+5+15+7=24$ 이다.

---

25. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식을 이용하여 로그 방정식을 세우고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 해의 곱을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]
로그의 진수와 밑 조건에 의해 $x>0$ 이고 $x\neq 1$ 이다. 주어진 방정식의 $log_x 8$ 에 밑 변환 공식을 적용하면 $log_x 8=\frac{log_2 8}{log_2 x}=\frac{3}{log_2 x}$ 이다. $log_2 x=t$ 로 치환하면 주어진 방정식은 $t=\frac{3}{t}+1$ 이다. $x\neq 1$ 이므로 $t\neq 0$ 이고, 양변에 t 를 곱하여 정리하면 $t^2=3+t$, 즉 $t^2-t-3=0$ 이다.
이 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2 라 하면, 근과 계수의 관계에 의해 $t_1+t_2=1$ 이다. 이때 주어진 방정식의 두 근을 x_1, x_2 라 하면 $t_1=log_2 x_1, t_2=log_2 x_2$ 이므로, $t_1+t_2=log_2 x_1+log_2 x_2=log_2(x_1x_2)$ 이다. 따라서 $log_2(x_1x_2)=1$ 이므로 모든 실수 x 의 값의 곱은 $x_1x_2=2^1=2$ 이다.

---

26. 정답 및 풀이

정답: 28

[출제의도] 절댓값 함수가 미분 불가능한 점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 관계를 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 함수의 매개변수를 찾아 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가한다.
[풀이]
함수 $f(x)=a|x-k|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하지 않다. 조건 (가)의 두 극한값은 각각 $x=k$ 에서의 우미분계수와 좌미분계수이다.
$x>k$ 일 때 $f(x)=a(x-k)$ 이므로 우미분계수는 a 이다.
$x<k$ 일 때 $f(x)=-a(x-k)$ 이므로 좌미분계수는 $-a$ 이다.
조건 (가)에 의해 $a\times(-a)=-a^2=-49$ 이다. $a>0$ 이므로 $a=7$ 이다.

함수식은 $f(x)=7|x-k|$ 이다.
조건 (나)에서 $f(2k)=21$ 이므로 $f(2k)=7|2k-k|=7|k|=21$ 이다. 따라서 $|k|=3$ 이므로 $k=3$ 또는 $k=-3$ 이다.
조건 (다)를 이용하여 k 의 값을 결정한다.
(i) $k=3$ 일 때, $f(x)=7|x-3|$ 이다. $f(-1)=7|-1-3|=28$, $f(1)=7|1-3|=14$ 이다. $f(-1)<f(1)$ 이 성립하지 않는다.
(ii) $k=-3$ 일 때, $f(x)=7|x+3|$ 이다. $f(-1)=7|-1+3|=14$, $f(1)=7|1+3|=28$ 이다. $f(-1)<f(1)$ 이 성립한다.
따라서 $a=7, k=-3$ 이다.

구하는 값은 $f(a+2k)=f(7+2(-3))=f(1)$ 이다.
$f(1)=7|1+3|=7\times 4=28$ 이다.

[4점]

---

27. 정답 및 풀이

정답: 110

[출제의도] 매개변수를 포함하는 두 함수의 교점을 이용하여 정의된 삼각형 넓이 함수의 미분계수를 극한의 정의를 이용하여 계산할 수 있는지를 평가한다.
[풀이]
두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2=2x+t$, 즉 $x^2-2x-t=0$ 의 두 실근이다. 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-t$ 이다. 삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)$ 는 $S(t)=\frac{1}{2}|\alpha(2\beta+t)-\beta(2\alpha+t)|=\frac{1}{2}|t(\alpha-\beta)|$ 이다. $t>0$ 이므로 $S(t)=\frac{t}{2}|\alpha-\beta|$ 이다.
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4(-t)=4+4t$ 이므로, $|\alpha-\beta|=\sqrt{4+4t}=2\sqrt{1+t}$ 이다. 따라서 $S(t)=\frac{t}{2}\cdot 2\sqrt{1+t}=t\sqrt{1+t}$ 이다. 구하는 극한값 k 는 미분계수의 정의에 의해 $S'(3)$ 과 같다.
$S'(t)=(t)'\sqrt{1+t}+t(\sqrt{1+t})'=\sqrt{1+t}+t\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}=\sqrt{1+t}+\frac{t}{2\sqrt{1+t}}$

이다.

$k = S'(3) = \sqrt{1+3} + \frac{3}{2\sqrt{1+3}} = \sqrt{4} + \frac{3}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ 이다. 따라서 구하는 값은 $40k = 40 \times \frac{11}{4} = 110$ 이다.

---

28. 정답 및 풀이

정답: 18

[출제의도] 다항함수의 극한에 대한 정보를 이용하여 함수의 차수와 계수를 결정하고, 주어진 조건을 종합하여 함숫값을 구할 수 있다.

[풀이]

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최고차항을 각각 ax^m, bx^n 이라 하고 최저차항을 각각 cx^p, dx^q 라 하자. (단, a, b, c, d 는 양의 정수)

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\{f(x)\}^2 g(x)}{x^5} = 2$$

이므로, 최고차항의 차수와 계수를 비교하면 $2m + n = 5$ 이고 $a^2 b = 2$ 이다. 계수가 정수이므로 $a = 1, b = 2$ 이다. $2m + n = 5$ 를 만족하는 음이 아닌 정수 (m, n) 은 $(0, 5), (1, 3), (2, 1)$ 이다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\{g(x)\}^2}{x^3} = 4$$

이므로, 최저차항의 차수와 계수를 비교하면 $p + 2q = 3$ 이고 $cd^2 = 4$ 이다. p, q 는 음이 아닌 정수이므로 (p, q) 는 $(1, 1)$ 또는 $(3, 0)$ 이고, c, d 는 양의 정수이므로 (c, d) 는 $(1, 2)$ 또는 $(4, 1)$ 이다.

(i) $(m, n) = (1, 3)$ 일 경우: $p \le m = 1, q \le n = 3$ 이므로 $(p, q) = (1, 1)$ 이다.

$f(x)$ 의 최고차항과 최저차항이 모두 1차이므로 $f(x) = ax = x$ 이다. 따라서 최저차항의 계수 $c = a = 1$ 이다.

$cd^2 = 4$ 에서 $1 \cdot d^2 = 4$ 이므로 $d = 2$ 이다.

$g(x)$ 는 최고차항이 $2x^3$, 최저차항이 $2x$ 인 다항함수이므로 $g(x) = 2x^3 + kx^2 + 2x$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이다.

조건 (다)에서 $g(1) = 2 + k + 2 = 4 + k = 2$ 이므로 $k = -2$ 가 되어, k 가 음이 아닌 정수라는 조건에 모순이다.

(ii) $(m, n) = (2, 1)$ 일 경우: $p \le m = 2, q \le n = 1$ 이므로 $(p, q) = (1, 1)$ 이다.

$g(x)$ 의 최고차항과 최저차항이 모두 1차이므로 $g(x) = bx = 2x$ 이다. 따라서 최저차항의 계수 $d = b = 2$ 이다.

$cd^2 = 4$ 에서 $c \cdot 2^2 = 4$ 이므로 $c = 1$ 이다.

$f(x)$ 는 최고차항이 x^2 , 최저차항이 x 인 다항함수이므로 $f(x) = x^2 + x$ 이다. (계수는 음이 아닌 정수)

$g(1) = 2(1) = 2$ 이므로 조건 (다)를 만족한다.

(i), (ii)에 의해 $f(x) = x^2 + x$ 이고 $g(x) = 2x$ 이다.

따라서 $f(3) + g(3) = (3^2 + 3) + (2 \cdot 3) = 12 + 6 = 18$ 이다.

---

29. 정답 및 풀이

정답: 30

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하고 항 사이의 관계를 추론하여 특정 항의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$a_n > 2$ 이면, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 1$ 이고 $-1 < a_{n+1} < -\frac{1}{2}$ 이다.

$a_{n+2} = -a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ 이고 $\frac{1}{2} < a_{n+2} < 1$ 이다.

$a_{n+3} = \frac{1}{a_{n+2}} - 1 = \frac{1}{1 - 1/a_n} - 1 = \frac{a_n}{a_n - 1} - 1 = \frac{1}{a_n - 1}$ 이고 $a_{n+3} > 0$ 이다.

$a_{n+4} = \frac{1}{a_{n+3}} - 1 = (a_n - 1) - 1 = a_n - 2$ 이다.

조건 (나)에서 $a_1 > 4$ 이므로 $a_1 > 2$ 이고, $a_5 = a_1 - 2 > 2$ 이다.

따라서 $a_9 = a_5 - 2 = (a_1 - 2) - 2 = a_1 - 4$ 이다.
$a_1 a_9 = a_1(a_1 - 4) = 21$ 이므로 $a_1^2 - 4a_1 - 21 = 0$, 즉 $(a_1 - 7)(a_1 + 3) = 0$ 이다.
$a_1 > 4$ 이므로 $a_1 = 7$ 이다.

$a_1 = 7$ 이므로 $a_5 = 5$, $a_9 = 3$ 이다. $a_9 = 3 > 2$ 이므로 $a_{13} = a_9 - 2 = 1$ 이다.
$a_9 = 3$ 이므로 $a_{10} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ 이다.
$a_{11} = -a_{10} = \frac{2}{3}$ 이다.
$a_{12} = \frac{1}{a_{11}} - 1 = \frac{1}{2/3} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ 이다.
따라서 구하는 값은 $20(a_{12} + a_{13}) = 20(\frac{1}{2} + 1) = 20 \times \frac{3}{2} = 30$ 이다.

---

30. 정답 및 풀이

정답: 184

[출제의도] 함수의 연속성, 함수 그래프의 개형, 절댓값 함수와 교점의 개수로 정의된 새로운 함수의 특성을 종합적으로 파악하여 미지수를 구하고 함숫값을 계산하는 문항을 출제한다.

[풀이]

함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \to 2-} g(x) = g(2)$ 이다. 따라서 $f(2) = \frac{2a}{2 + b}$ 이다.
조건 (가)에서 함수 $h(t)$ 는 $t > 0$ 에서 감소하거나 상수이므로, $y = |g(x)|$ 의 그래프는 $y > 0$ 에서 극솟값을 갖지 않는다. $x \geq 2$ 에서 $g(x) = f(x)$ 이고 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수이므로, $f(x) = (x - p)^2 + q$ 라 할 때 이 조건을 만족시키려면 $p > 2$ 이고 $q \leq 0$ 이어야 한다.

$h(t)$ 가 $t > 0$ 에서 불연속인 지점은 $y = |g(x)|$ 그래프의 극댓값 또는 양수인 수평 점근선의 y 좌표에서 나타난다. $x < 2$ 일 때 $g(x) = \frac{ax}{x + b}$ 의 수평 점근선은 $y = a$ 이다. $y = |g(x)|$ 는 $x = 2$ 에서 극대, $x = p$ 에서 $q < 0$ 일 경우 극대이다. 따라서 불연속이 되는 t 값은 a , $f(2)$, $-q$ 중에서 나타난다. 조건 (나)에서 불연속점이 2개이므로, 이 세 값 중 두 값은 같아야 한다.
$f(2) = \frac{2a}{2 + b} < a$ 이므로 $a = f(2)$ 는 불가능하다. 따라서 $a = -q$ 또는 $f(2) = -q$ 이다.
조건 (다)에서 $h(0) = 3$ 이므로, 방정식 $|g(x)| = 0$ 은 3 개의 실근을 갖는다. $x < 2$ 에서 $\frac{ax}{x + b} = 0$ 의 근은 $x = 0$ 하나뿐이다. 따라서 $x \geq 2$ 에서 $f(x) = 0$ 이 두 실근을 가져야 하므로 $q < 0$ 이다. 이 경우 $y = |f(x)|$ 는 $x = p$ 에서 $y = -q$ 인 극댓값을 갖는다. 따라서 불연속점은 2개이므로 $a = -q$ 이다.

불연속점은 $t = a$ 와 $t = f(2)$ 이다. 조건 (나)에 의해 이 두 값의 합은 16 , 곱은 48 이므로, 두 값은 4 와 12 이다.
1) $a = 12$, $f(2) = 4$ 인 경우:
$q = -a = -12$ 이다.
$f(2) = \frac{2a}{2 + b}$ 에서 $4 = \frac{2(12)}{2 + b}$ 이므로 $4(2 + b) = 24$, $2 + b = 6$, $b = 4$ 이다. (a, b 양수 조건 만족)
$f(x) = (x - p)^2 - 12$ 이고 $f(2) = 4$ 이므로 $(2 - p)^2 - 12 = 4$, $(2 - p)^2 = 16$. $p > 2$ 이므로 $2 - p = -4$, $p = 6$ 이다.
$f(x) = (x - 6)^2 - 12 = 0$ 의 근은 $x = 6 \pm \sqrt{12}$ 이며, 두 근 모두 2 보다 크므로 $h(0) = 3$ 조건을 만족한다.

2) $a = 4$, $f(2) = 12$ 인 경우:
$q = -a = -4$ 이다.
$f(2) = \frac{2a}{2 + b}$ 에서 $12 = \frac{2(4)}{2 + b}$ 이므로 $12(2 + b) = 8$, $2 + b = 2/3$, $b = -4/3$ 이다. (b 가 양수라는 조건에 위배)

따라서 $a = 12, b = 4$ 이고 $f(x) = (x - 6)^2 - 12$ 이다.
구하는 값은 $f(b - a) = f(4 - 12) = f(-8)$ 이다.
$f(-8) = (-8 - 6)^2 - 12 = (-14)^2 - 12 = 196 - 12 = 184$ 이다.
