

## 빠른 정답

|    |    |    |    |    |    |    |    |     |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9   | 10 |
| ③  | ③  | ④  | ③  | ②  | ③  | ③  | ③  | ②   | ③  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19  | 20 |
| ③  | ③  | ③  | ③  | ③  | 6  | 10 | ③  | 16  | 11 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29  | 30 |
| 51 | 81 | ③  | ②  | ④  | ④  | ③  | ③  | 172 | ④  |

## 1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이] 로그의 성질에 따라 밑이 같은 두 로그의 합은 진수의 곱으로 나타낼 수 있다. 주어진 식은  $\log_2((\sqrt{10} - \sqrt{2})(\sqrt{10} + \sqrt{2}))$  와 같다. 합차 공식을 이용하여 진수를 계산하면  $(\sqrt{10} - \sqrt{2})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2 = 10 - 2 = 8$  이다. 따라서 구하는 값은  $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$  이다.

## 2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.

[풀이] 주어진 극한 식은 미분계수의 정의에 의해

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{3h} = \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{3} f'(2)$$

이다.

문제의 조건에서  $\frac{1}{3} f'(2) = 10$  이므로  $f'(2) = 30$  이다.함수  $f(x) = 2x^3 + ax - 1$  의 도함수는  $f'(x) = 6x^2 + a$  이다. $x = 2$  를 대입하면  $f'(2) = 6(2^2) + a = 24 + a$  이므로,  $24 + a = 30$  에서  $a = 6$  이다.따라서 상수  $a$  의 값은 6 이다.

## 3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 주어진 삼각함수의 부호 조건을 통해 각이 존재하는 사분면을 파악하고, 곱셈 공식을 이용하여 다른 삼각함수 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$\tan \theta < 0$  이므로  $\theta$  는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 여기에  $\sin \theta > \cos \theta$  라는 조건을 만족시키는 경우는  $\sin \theta > 0$  ,  $\cos \theta < 0$  이므로  $\theta$  는 제2사분면의 각이다.

주어진 식  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$  의 양변을 제곱하면

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{9} \text{ 이므로 } 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{9} \text{ 이다.}$$

구하려는 식의 값을  $k$  라 하면,  $k^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - (-\frac{7}{9}) = \frac{16}{9}$  이다. 따라서  $k = \pm \frac{4}{3}$  이다.  
 $\theta$  가 제2사분면의 각이므로  $\sin \theta > 0$  이고  $\cos \theta < 0$  이다. 따라서  $\sin \theta - \cos \theta$  는 양수이다.  
 그러므로  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{4}{3}$  이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 함수에 대해 좌극한과 합성함수의 우극한을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

함수  $f(x)$  의 정의에 따라  $x \rightarrow 1 -$  일 때  $f(x) = -x$  이므로  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1$  이다.

$\lim_{x \rightarrow -1+} f(1-x)$  에서  $t = 1-x$  로 치환하면  $x \rightarrow -1+$  일 때  $t \rightarrow 2 -$  이므로, 주어진 식은  $\lim_{t \rightarrow 2-} f(t)$  와 같다.

$t \rightarrow 2 -$  일 때  $t$  는 1보다 큰 값을 가지면서 2에 가까워지므로  $f(t) = 2t - 1$  이다. 따라서  $\lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2-} (2t - 1) = 2(2) - 1 = 3$  이다.

따라서 구하는 값은  $-1 + 3 = 2$  이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 주어진 조건으로부터 미분계수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

함수  $g(x) = (x^2 - 3x)f(x)$  의 양변을  $x$  에 대하여 미분하면 곱의 미분법에 의해

$g'(x) = (x^2 - 3x)'f(x) + (x^2 - 3x)f'(x) = (2x - 3)f(x) + (x^2 - 3x)f'(x)$  이다.

위 식에  $x = 2$  를 대입하면  $g'(2) = (2 \cdot 2 - 3)f(2) + (2^2 - 3 \cdot 2)f'(2) = f(2) - 2f'(2)$  이다.

주어진 조건  $f(2) = 5$  와  $g'(2) = 9$  를 대입하면  $9 = 5 - 2f'(2)$  이므로,  $2f'(2) = 5 - 9 = -4$  이다.

따라서  $f'(2) = -2$  이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수의 대칭성과 근과 계수의 관계를 이용하여 삼차함수의 극값의 차에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 구한다.

[풀이]

$f(x)$  의 최고차항의 계수가 1이므로  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  로 놓으면, 도함수는  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$  이다.

$y = f'(x)$  는 아래로 볼록한 이차함수이고  $x = 1$  에서 최솟값을 가지므로, 대칭축의 방정식은  $x = -\frac{2a}{2 \cdot 3} = 1$  이다. 따라서  $a = -3$  이다.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + b$  이고, 극값을 갖게 하는 두  $x$  좌표를  $\alpha, \beta$  라 하면, 이들은 이차방정식  $3x^2 - 6x + b = 0$  의 두 근이다. 근과 계수의 관계에 의해  $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{b}{3}$  이다.

삼차함수 극값의 차 공식에 의해,  $\frac{11}{2}|\beta - \alpha|^3 = 4$  이므로  $|\beta - \alpha|^3 = 8$  , 즉  $|\beta - \alpha| = 2$  이다.

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$  이므로  $2^2 = 2^2 - 4(\frac{b}{3})$  이다.

$4 = 4 - \frac{4b}{3}$  에서  $\frac{4b}{3} = 0$  이므로  $b = 0$  이다.

따라서 구하는 값은  $f'(0) = b = 0$  이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 이 직선이 다른 곡선과 접할 조건을 이용하여 상수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$f(x) = -x^3 + 3x^2$  라 하면 도함수는  $f'(x) = -3x^2 + 6x$  이다. 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, 2)$  에서의 접선의 기울기는  $f'(1) = -3 + 6 = 3$  이므로, 접선의 방정식은  $y - 2 = 3(x - 1)$  , 즉  $y = 3x - 1$  이다.

이 접선이 곡선  $y = x^2 - x + k$  에 접하므로, 두 식을 연립한 이차방정식  $x^2 - x + k = 3x - 1$  이 중근을 가져야 한다. 식을 정리하면

$$x^2 - 4x + (k + 1) = 0$$

이다.

위 이차방정식의 판별식을  $D$  라 하면  $D/4 = (-2)^2 - (k+1) = 3 - k = 0$  이어야 하므로, 상수  $k$  의 값은 3 이다.

## 8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하는 문제를 해결할 수 있다.

[풀이] 이차방정식  $x^2 - 6x + k = 0$  의 두 실근을  $\alpha, \beta$  라 하면, 주어진 조건에 따라  $\alpha = \log_2 a$  이고  $\beta = \log_a 256$  이다. 로그의 밑 변환 공식에 의해  $\beta = \log_a 2^8 = 8 \log_a 2 = \frac{8}{\log_2 a} = \frac{8}{\alpha}$  이다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은  $\alpha + \beta = 6$  이므로,  $\alpha + \frac{8}{\alpha} = 6$  이다. 양변에  $\alpha$  를 곱하여 정리하면  $\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$  , 즉  $(\alpha - 2)(\alpha - 4) = 0$  이므로  $\alpha = 2$  또는  $\alpha = 4$  이다.  $\alpha = \log_2 a$  이므로,  $a = 2^2 = 4$  또는  $a = 2^4 = 16$  이다. 조건  $2 < a < 10$  을 만족시키는 값은  $a = 4$  이다.

두 근의 곱은  $k = \alpha\beta = (\log_2 a)(\log_a 256) = \log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$  이다. 따라서 구하는 값은  $a + k = 4 + 8 = 12$  이다.

## 9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각부등식의 해를 구하고, 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

부등식  $\sin x \geq \cos k$  에서  $\cos k = \sin(\frac{\pi}{2} - k)$  이므로, 주어진 부등식은  $\sin x \geq \sin(\frac{\pi}{2} - k)$  이다.  $0 < k < \frac{\pi}{2}$  이므로  $0 < \frac{\pi}{2} - k < \frac{\pi}{2}$  이다.  $\theta = \frac{\pi}{2} - k$  라 하자.

$0 \leq x \leq \pi$  의 범위에서 함수  $y = \sin x$  의 그래프를 이용하여 부등식  $\sin x \geq \sin \theta$  의 해를 구하면  $\theta \leq x \leq \pi - \theta$  이다. 따라서  $\alpha = \theta$  ,  $\beta = \pi - \theta$  이다. 문제의 조건에서  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$  이므로  $(\pi - \theta) - \theta = \frac{\pi}{3}$  이다. 이 식을 정리하면  $\pi - 2\theta = \frac{\pi}{3}$  에서  $2\theta = \frac{2\pi}{3}$  , 즉  $\theta = \frac{\pi}{3}$  이다.

$\theta = \frac{\pi}{2} - k$  이므로  $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - k$  이다. 따라서  $k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$  이다.

## 10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 특정 항을 구한다.

[풀이]

수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a$  , 공비를  $r$  이라 하면 문제의 조건에 의해  $a > 0, r > 1$  이다.

$S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$  이므로,

$$\sum_{k=1}^4 (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^4 a_{k+1} = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$$

이다.

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = ar(1 + r + r^2 + r^3) = 30$  이다.

또한,  $a_3 = ar^2 = 4$  이므로  $a = \frac{4}{r^2}$  이다.

이를  $a(r + r^2 + r^3 + r^4) = 30$  에 대입하면,  $\frac{4}{r^2}(r + r^2 + r^3 + r^4) = 30$  이다.

$4(\frac{1}{r} + 1 + r + r^2) = 30$  이고, 양변에  $r$  을 곱하여 정리하면  $4(1 + r + r^2 + r^3) = 30r$  이다.

$4r^3 + 4r^2 - 26r + 4 = 0$  , 즉  $2r^3 + 2r^2 - 13r + 2 = 0$  을 얻는다.

$P(r) = 2r^3 + 2r^2 - 13r + 2$  라 하면  $P(2) = 16 + 8 - 26 + 2 = 0$  이므로  $(r - 2)$  를 인수로 갖는다.

$(r - 2)(2r^2 + 6r - 1) = 0$  에서 공비  $r > 1$  이므로  $r = 2$  이다.

$ar^2 = 4$  에  $r = 2$  를 대입하면  $a(2^2) = 4$  이므로  $a = 1$  이다.

따라서 구하는 값은  $a_6 = ar^5 = 1 \cdot 2^5 = 32$  이다.

## 11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 위치, 속도, 가속도의 관계를 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 시각에서 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 P, Q의 위치 함수  $x_P(t) = t^3 - 6t^2 + 5$ ,  $x_Q(t) = -4t + 1$  을 각각 두 번 미분하여 가속도 함수를 구한다.

$$v_P(t) = 3t^2 - 12t, a_P(t) = 6t - 12$$

$$v_Q(t) = -4, a_Q(t) = 0$$

두 점의 가속도가 같아지는 시각  $t$  는  $a_P(t) = a_Q(t)$  이므로  $6t - 12 = 0$  에서  $t = 2$  이다.

$t = 2$  일 때 두 점의 위치는  $x_P(2) = 2^3 - 6(2^2) + 5 = -11$  이고,  $x_Q(2) = -4(2) + 1 = -7$  이다. 따라서 두 점 사이의 거리는

$$|x_P(2) - x_Q(2)| = |-11 - (-7)| = 4 \text{ 이다.}$$

## 12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 3의 배수 여부에 따라 항이 정해지는 수열의 규칙을 이해하고, 조건을 만족하는 첫째항을 역추적한다.

[풀이]

$a_2$  가 3의 배수인 경우와 아닌 경우로 나누어 생각한다.

(1)  $a_2$  가 3의 배수인 경우

$$a_2 = 3k \text{ 라 하면 } a_3 = k \text{ 이다.}$$

$k$  가 3의 배수이면  $k = 3m$  으로 놓을 수 있고

$$a_2 = 9m, a_4 = m \text{ 이다.}$$

$$a_2 + a_4 = 30 \text{ 이므로}$$

$$10m = 30 \text{ 에서 } m = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a_2 = 27 \text{ 이다.}$$

$k$  가 3의 배수가 아니면  $a_4 = k + 2$  이다.

$$3k + (k + 2) = 30 \text{ 에서 } k = 7 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = 21 \text{ 이다.}$$

(2)  $a_2$  가 3의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = a_2 + 2 \text{ 이다.}$$

$a_2$  를 3으로 나눈 나머지가 1이면  $a_3$  은 3의 배수이므로

$$a_4 = (a_2 + 2)/3 \text{ 이다.}$$

$$a_2 + (a_2 + 2)/3 = 30 \text{ 에서}$$

$$a_2 = 22 \text{ 이다.}$$

$a_2$  를 3으로 나눈 나머지가 2이면  $a_3$  도 3의 배수가 아니므로

$$a_4 = a_2 + 4 \text{ 이다.}$$

$$a_2 + (a_2 + 4) = 30 \text{ 에서 } a_2 = 13 \text{ 을 얻지만,}$$

13을 3으로 나눈 나머지는 1이므로 이 경우에는 맞지 않는다.

따라서 가능한  $a_2$  는 21, 22, 27 이다.

$a_1$  이 3의 배수이면  $a_2 = a_1/3$  이므로  $a_1 = 3a_2$  이고,

$a_1$  이 3의 배수가 아니면  $a_2 = a_1 + 2$  이므로  $a_1 = a_2 - 2$  이다.

$$a_2 = 21$$

일 때  $a_1 = 63$  또는  $19$  ,  
 $a_2 = 22$  일 때  $a_1 = 66$  또는  $20$  ,  
 $a_2 = 27$  일 때  $a_1 = 81$  또는  $25$  이다.

따라서 가능한 모든  $a_1$  의 합은  
 $63 + 19 + 66 + 20 + 81 + 25 = 274$  이다.

### 13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한이 모든 실수에서 존재할 조건을 이해하고, 이를 만족시키는 미정계수의 범위를 이차방정식의 실근 조건과 연계하여 구하는 문제입니다.

[풀이]

주어진 극한값이 모든 실수  $a$  에 대하여 존재해야 합니다. 분모의 함수를  $g(x) = f(x) - k(x-1)$  이라 하면,  $g(x)$  는 이차함수이므로 모든 실수에서 연속입니다. 만약 어떤 실수  $a$  에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$  이라면, 극한값이 존재하기 위해서는

$\lim_{x \rightarrow a} (x-2)^2 = (a-2)^2 = 0$  이어야 합니다. 따라서  $g(x) = 0$  의 실근은  $x = 2$  만 가능합니다.

$g(x) = x^2 - 2x + 2 - k(x-1) = x^2 - (k+2)x + (k+2)$  입니다.

이차방정식  $g(x) = 0$  의 실근이  $x = 2$  만 가능하므로, 다음 두 가지 경우를 생각할 수 있습니다.

1. 방정식  $g(x) = 0$  이 실근을 갖지 않는 경우:

판별식  $D < 0$  이어야 합니다.

$$D = (k+2)^2 - 4(k+2) = (k+2)(k-2) < 0$$

따라서  $-2 < k < 2$  이고, 정수  $k$  는  $-1, 0, 1$  입니다.

2. 방정식  $g(x) = 0$  이 중근  $x = 2$  를 갖는 경우:

$g(x)$  는  $(x-2)^2$  꼴이어야 합니다.

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ 이므로 } x^2 - (k+2)x + (k+2) = x^2 - 4x + 4 \text{ 입니다.}$$

계수를 비교하면  $k+2 = 4$  에서  $k = 2$  입니다. 이 값은  $k+2 = 4$  도 만족합니다.

$k = 2$  일 때  $g(x) = (x-2)^2$  이므로  $x = 2$  에서 극한값

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} = 1$$

이 존재합니다.

두 경우를 종합하면 가능한 정수  $k$  는  $-1, 0, 1, 2$  입니다. 따라서 모든 정수  $k$  의 개수는 4개입니다.

### 14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계 및 대칭성을 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구하여 수열의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점  $P_n$  의 좌표를  $(p_n, \log_2 p_n)$  , 점  $Q_n$  의 좌표를  $(q_n, \log_2 q_n)$  이라 하자. ( $0 < p_n < q_n$  )

조건 (가)에서  $Q_n$  과  $P_n$  의  $y$  좌표의 차가  $n$  이므로  $\log_2 q_n - \log_2 p_n = n$  이다. 즉,  $\log_2 (q_n/p_n) = n$  이므로  $q_n = p_n \cdot 2^n$  이다.

조건 (나)에서 직선  $P_n Q_n$  의 기울기는  $\frac{\log_2 q_n - \log_2 p_n}{q_n - p_n} = \frac{n}{q_n - p_n}$  이고 이 값이  $n$  이므로,  $q_n - p_n = 1$  이다.

두 식  $q_n = p_n \cdot 2^n$  과  $q_n - p_n = 1$  을 연립하여  $p_n, q_n$  을 구한다.

$p_n \cdot 2^n - p_n = 1$  에서  $p_n(2^n - 1) = 1$  이므로  $p_n = \frac{1}{2^n - 1}$  이다.

$$q_n = 1 + p_n = 1 + \frac{1}{2^n - 1} = \frac{2^n - 1 + 1}{2^n - 1} = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

이다.

한편, 원의 중심이 직선  $y = x$  위에 있고 이 원이 로그함수  $y = \log_2 x$  위의 두 점  $P_n, Q_n$  을 지나므로, 원과 지수함수  $y = 2^x$  의 두 교점  $A_n, B_n$  은 각각 두 점  $P_n, Q_n$  을 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서 두 교점의 좌표는  $(\log_2 p_n, p_n)$  과  $(\log_2 q_n, q_n)$  이다.

두 점  $A_n, B_n$  의  $y$  좌표의 합  $y_n$  은  $p_n + q_n$  과 같다.

$$y_n = p_n + q_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n}{2^n - 1} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \text{ 이다.}$$

$$y_1 = \frac{2^1 + 1}{2^1 - 1} = 3$$

$$y_2 = \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}$$

$$y_3 = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} = \frac{9}{7}$$

$$\text{따라서 구하는 값은 } y_1 + y_2 + y_3 = 3 + \frac{5}{3} + \frac{9}{7} = \frac{63 + 35 + 27}{21} = \frac{125}{21} \text{ 이다.}$$

## 15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제요도] 함수의 극한과 연속의 개념을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 추론하고 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

함수  $f(x)$  는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 만약  $f(2) \neq 0$  이라면  $x = 2$  근방에서  $f(x) \neq 0$  이므로,

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 1}{f(x)} = \frac{f(3) - 1}{f(2)} = g(2)$$

가 된다. 이 경우 주어진 조건  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) - 6$  은  $g(2) = g(2) - 6$  , 즉  $0 = -6$  이 되어 모순이다. 따라서  $f(2) = 0$  이어야 한다.

$f(2) = 0$  이므로, 함수  $g(x)$  의 정의에 따라  $g(2) = 4$  이다. 주어진 조건에 대입하면  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 - 6 = -2$  이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 1}{f(x)} = -2$$

이다. 이때  $x \rightarrow 2$  이면 분모가  $f(x) \rightarrow f(2) = 0$  으로 수렴하므로, 극한값이 존재하기 위해서는 분자도 0 으로 수렴해야 한다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x+1) - 1\} = f(3) - 1 = 0 \text{ 이므로 } f(3) = 1 \text{ 이다.}$$

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수  $f(x)$  에 대하여  $f(2) = 0, f(3) = 1$  이므로  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  라 하면

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0, f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 1 \text{ 이다. 두 식을 빼면 } 19 + 5a + b = 1, \text{ 즉 } 5a + b = -18 \text{ 이다.}$$

한편,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - f(3)}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{f(x+1) - f(3)}{x-2}}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} = \frac{f'(3)}{f'(2)} = -2$$

이다.  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$  이므로  $f'(2) = 12 + 4a + b$  ,  $f'(3) = 27 + 6a + b$  이다.  $f'(3) = -2f'(2)$  에서

$$27 + 6a + b = -2(12 + 4a + b), \text{ 즉 } 14a + 3b = -51 \text{ 이다.}$$

연립방정식  $5a + b = -18$  과  $14a + 3b = -51$  을 풀면  $a = -3, b = -3$  이다.  $c = -8 - 4a - 2b = -8 + 12 + 6 = 10$  이므로  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 10$  이다.

구하는 값은  $g(3)$  이다.  $f(3) = 3^3 - 3(3^2) - 3(3) + 10 = 1 \neq 0$  이므로  $g(3) = \frac{f(3+1) - 1}{f(3)} = \frac{f(4) - 1}{f(3)}$  이다.

$$f(4) = 4^3 - 3(4^2) - 3(4) + 10 = 64 - 48 - 12 + 10 = 14 \text{ 이므로, } g(3) = \frac{14 - 1}{1} = 13 \text{ 이다.}$$

## 16. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 귀납적으로 정의된 수열의 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 문제의 조건에 따라  $a_1 = 3$  이므로  $S_1 = a_1 = 3$  이다. 주어진 점화식  $S_{n+1} = 3S_n - 4$  에  $n = 1$  을 대입하면  $S_2 = 3S_1 - 4 = 3(3) - 4 = 5$  이다. 같은 점화식에  $n = 2$  를 대입하면  $S_3 = 3S_2 - 4 = 3(5) - 4 = 11$  이다. 따라서  $n \geq 2$  일 때  $a_n = S_n - S_{n-1}$  이므로,  $a_3 = S_3 - S_2 = 11 - 5 = 6$  이다.

## 17. 정답 및 풀이

정답: 10

[출제의도] 도함수가 주어진 함수의 부정적분을 구하고, 정적분 값을 이용하여 적분상수를 결정한 후 함수값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f'(x) = 4x - 3$  이므로 부정적분을 구하면

$$f(x) = \int (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x + C$$

(단,  $C$  는 적분상수)이다.

주어진 정적분 조건

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$$

을 이용하면,

$$\int_0^1 (2x^2 - 3x + C) dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + Cx \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + C = -\frac{5}{6} + C$$

이다.

$-\frac{5}{6} + C = \frac{1}{6}$  이므로  $C = 1$  이고, 함수  $f(x)$  는  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  이다.

따라서 구하는 값은  $f(3) = 2(3^2) - 3(3) + 1 = 18 - 9 + 1 = 10$  이다.

## 18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미정계수를 구하고, 이를 미분계수의 정의와 결합하여 함수의 극한값을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

함수  $f(x) = (x^3 + k)(x^2 - 2x + 3)$  의 도함수는 곱의 미분법에 의해  $f'(x) = 3x^2(x^2 - 2x + 3) + (x^3 + k)(2x - 2)$  이다. 조건  $f'(0) = -8$  에서  $x = 0$  을 대입하면  $f'(0) = (0)(3) + (k)(-2) = -2k$  이므로,  $-2k = -8$  에서  $k = 4$  를 얻는다.

구하고자 하는 극한값은 미분계수의 정의를 이용하여 변형하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(1)$$

이다.

$k = 4$  를 도함수에 대입하고  $x = 1$  을 대입하여  $f'(1)$  을 계산하면  $f'(1) = 3(1)^2(1 - 2 + 3) + (1^3 + 4)(2 - 2) = 3(2) + 5(0) = 6$  이므로, 구하는 답은  $\frac{1}{2} \times 6 = 3$  이다.

## 19. 정답 및 풀이

정답: 16

[출제의도] 삼차함수의 극값의 성질을 이용하여 미정계수를 찾고, 이를 통해 다른 극값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수  $g(x) = -x^3 + 3ax^2 + 4a^2$  을 미분하면  $g'(x) = -3x^2 + 6ax = -3x(x - 2a)$  이다.  $g'(x) = 0$  에서  $x = 0$  또는  $x = 2a$  에서 극값을 갖는다.  $g(x)$  의 최고차항 계수가 음수이므로, 그래프는 x좌표가 더 작은 지점에서 극솟값을, x좌표가 더 큰 지점에서 극댓값을 갖는다.

(i)  $a > 0$  인 경우:  $0 < 2a$  이므로  $x = 2a$  에서 극댓값을 갖는다.  $g(2a) = 4a^3 + 4a^2 = 16$  이며, 이 방정식을 만족하는 간단한 유리수 해  $a$  는 존재하지 않는다.

(ii)  $a < 0$  인 경우:  $2a < 0$  이므로  $x = 0$  에서 극댓값을 갖는다.  $g(0) = 4a^2 = 16$  에서  $a^2 = 4$  이고,  $a < 0$  이므로  $a = -2$  이다.

$a = -2$  이므로 극솟값은  $x = 2a = -4$  에서 발생한다.  $g(x) = -x^3 - 6x^2 + 16$  이므로 극솟값은

$g(-4) = -(-4)^3 - 6(-4)^2 + 16 = 64 - 96 + 16 = -16$  이다. 따라서 구하는 극솟값의 절댓값은  $|-16| = 16$  이다.

## 20. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 삼각함수의 그래프 개형을 파악하고, 방정식의 실근 조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 함수  $y = f(x)$  의 그래프와 직선  $y = C$  의 교점의 개수를  $N(C)$  라 하자.

$0 \leq x \leq \pi$  일 때  $f(x) = 2\cos x + 2$  의 치역은  $[0, 4]$  이고,  $\pi < x \leq 2\pi$  일 때  $f(x) = -\sin(2x)$  의 치역은  $[-1, 1]$  이다.

$y = f(x)$  의 그래프를 그려 교점의 개수를 확인하면 다음과 같다.

- $0 < C < 1$  일 때,  $y = C$  는  $y = 2\cos x + 2$  의 그래프와 한 번,  $y = -\sin(2x)$  의 그래프와 두 번 만나므로 교점은 3개이다.
- $C = 0$  일 때,  $y = 0$  은  $x = \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$  에서 만나므로 교점은 3개이다.

다른  $C$  의 값에 대해서는 교점의 개수가 3이 아니다.

따라서 방정식  $f(x) = f(t)$  의 실근의 개수가 3이려면  $f(t)$  의 값의 범위는  $0 \leq f(t) < 1$  이어야 한다.

문제의 조건에서  $f(t)$  는 정수이므로,  $f(t) = 0$  이다.

$f(t) = 0$  을 만족시키는  $t$  의 값을 구하자.

(i)  $0 \leq t \leq \pi$  인 경우:  $2\cos t + 2 = 0$  에서  $\cos t = -1$  이므로  $t = \pi$  이다.

(ii)  $\pi < t \leq 2\pi$  인 경우:  $-\sin(2t) = 0$  에서  $\sin(2t) = 0$  이다.  $2\pi < 2t \leq 4\pi$  이므로  $2t = 3\pi, 4\pi$  이다. 따라서  $t = \frac{3}{2}\pi, 2\pi$  이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든  $t$  의 값은  $\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$  이다.

이들의 합은  $\pi + \frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{9}{2}\pi$  이다.

따라서  $\frac{q}{p} = \frac{9}{2}$  이므로, 서로소인 자연수  $p = 2, q = 9$  이다.

그러므로  $p + q = 2 + 9 = 11$  이다.

## 21. 정답 및 풀이

정답: 51

[출제의도] 등차수열의 합과 일반항의 관계 및 자연수 조건을 이용한 부정방정식 풀이를 통해 수열의 특정 항을 추론하는 능력을 평가한다.

[풀이]

첫째항을  $a$  , 공차를  $d$  라 하면, 모든 항이 자연수이므로  $a$  와  $d$  는 자연수이다.

조건 (가)에서  $S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$  이고  $a_5 = a + 4d$  이므로,  $10a + 45d = 11(a + 4d)$  에서  $a = d$  를 얻는다.

조건 (나)에  $a = d$  를 대입하면  $S_m = \frac{m(2a + (m-1)d)}{2} = \frac{m(2d + (m-1)d)}{2} = \frac{dm(m+1)}{2} = 170$  이므로,  $dm(m+1) = 340$  이다.

$d, m$  이 자연수이므로  $m(m+1)$  은 340의 약수 중 연속된 두 자연수의 곱이다. 가능한 경우는  $m = 1, m(m+1) = 2$  일 때  $d = 170$  이고,  $m = 4, m(m+1) = 20$  일 때  $d = 17$  이다.

조건 (다)에서  $a_4 = a + 3d = 4d$  는 두 자리 자연수이다.  $d = 170$  이면  $a_4 = 680$  이므로 조건을 만족하지 않고,  $d = 17$  이면  $a_4 = 68$  이므로 조건을 만족한다.

따라서  $a = d = 17$  이고, 구하는 값은  $a_3 = a + 2d = 3d = 3 \times 17 = 51$  이다.

## 22. 정답 및 풀이

정답: 81

[출제의도] 로그함수의 그래프와 좌표기하의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구하고, 이를 통해 사각형의 넓이를 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

점 A 의 좌표를  $(a, \log_3 a)$  , 점 B 의 좌표를  $(b, \log_3 b)$  라 하자. (단,  $a \neq b$  ,  $a > 0, b > 0$  )

(가) 선분 AB 를 나타내는 벡터는  $(b - a, \log_3 b - \log_3 a)$  이다. 직선  $y = -x$  의 방향벡터는  $(1, -1)$  이고, 이 방향의 단위벡터는

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  이다. 선분 AB 의 직선  $y = -x$  위로의 정사영의 길이는 두 벡터의 내적의 절댓값과 같으므로,

$$|(b - a) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (\log_3 b - \log_3 a) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(b - a) - (\log_3 b - \log_3 a)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(a - b) + (\log_3 a - \log_3 b)| = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ 이다.}$$

따라서  $|(a - b) + (\log_3 a - \log_3 b)| = 7$  이다.  $a > b$  라고 가정하면  $(a - b) + (\log_3 a - \log_3 b) = 7$  이다.

(나) 직선 AB 가 점  $(-3, 0)$  을 지나므로, 세 점 A, B,  $(-3, 0)$  은 한 직선 위에 있다. 따라서 직선의 기울기가 일정하므로  $\frac{\log_3 a - 0}{a - (-3)} = \frac{\log_3 b - 0}{b - (-3)}$  즉,  $\frac{\log_3 a}{a+3} = \frac{\log_3 b}{b+3}$  이다.

함수  $f(x) = \frac{\log_3 x}{x+3}$  를 생각하면  $f(a) = f(b)$  이다.  $a = 9, b = 3$  일 때  $f(9) = \frac{\log_3 9}{9+3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$  이고,  $f(3) = \frac{\log_3 3}{3+3} = \frac{1}{6}$  이므로  $f(9) = f(3)$  이 성립한다. 또한 (가)의 식에 대입하면  $(9 - 3) + (\log_3 9 - \log_3 3) = 6 + (2 - 1) = 7$  이므로 조건 (가)도 만족한다. 따라서 두 점의 좌표는 A(9, 2), B(3, 1) 이다.

점 A(9, 2) 에서 직선  $y = x$  에 내린 수선의 발 P 가 있고, 점 B(3, 1) 을  $y = x$  에 대칭이동한 점은 Q(1, 3) 이다. 직선 AP 와 직선 BQ 는 모두 직선  $y = x$  에 수직이므로 서로 평행하다. 따라서 사각형 APQB 는 사다리꼴이다.

사다리꼴의 높이는 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다. 직선 AP 의 방정식은  $x + y = 11$  , 직선 BQ 의 방정식은  $x + y = 4$  이므로, 높이

$$h = \frac{|11 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ 이다.}$$

$\overline{AP}$  는 점 A(9, 2) 와 직선  $x - y = 0$  사이의 거리이므로  $\overline{AP} = \frac{|9 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$  이다.

$\overline{BQ}$  는 점 B(3, 1) 과 점 Q(1, 3) 사이의 거리이므로  $\overline{BQ} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  이다.

사각형 APQB 의 넓이는  $\frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{BQ})h = \frac{1}{2}(\frac{7}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\frac{7+4}{\sqrt{2}}) \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{77}{4}$  이다.

따라서  $p = 4, q = 77$  이고,  $p + q = 4 + 77 = 81$  이다.

## 23. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 응용하여 특정 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 다섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 전체 경우의 수는 1이 3개이므로  $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$  이다.

이 문제에서는 양 끝의 숫자가 다른 경우를 구해야 하므로, 전체 경우의 수에서 양 끝의 숫자가 같은 경우의 수를 빼는 것이 편리하다.

양 끝의 숫자가 같으려면 양 끝에 모두 숫자 1이 와야 한다. 이 경우, 가운데 세 자리에는 나머지 숫자 1, 2, 3을 나열하면 되므로 그 경우의 수는  $3! = 6$  이다.

따라서 구하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝의 숫자가 같은 경우의 수를 빼  $20 - 6 = 14$  이다.

## 24. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 전체 경우의 수에서 특정 조건을 만족하는 경우의 수를 빼는 여사건의 원리를 이용하여 최단경로의 수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 점 A(0,0)에서 B(3,3)까지 최단거리로 가는 전체 경로의 수는 오른쪽으로 3번, 위쪽으로 3번 이동하는 같은 것이 있는 순열의 수와 같습니다.

$$\text{전체 경로의 수} = \frac{(3+3)!}{3!3!} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

점 P(1,2)를 지나는 최단경로의 수는 A(0,0)에서 P(1,2)까지의 최단경로의 수와 P(1,2)에서 B(3,3)까지의 최단경로의 수를 곱한 값과 같습니다.

$$(A \rightarrow P \text{ 경로의 수}) = \frac{(1+2)!}{1!2!} = 3$$

$$(P \rightarrow B \text{ 경로의 수}) = \frac{((3-1) + (3-2))!}{(3-1)!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

따라서 점 P(1,2)를 지나는 경로의 수는 곱의 법칙에 의해  $3 \times 3 = 9$  입니다.  
 구하는 경로의 수는 전체 경로의 수에서 점 P를 지나는 경로의 수를 뺀 값이므로  $20 - 9 = 11$  입니다.

25. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 사건의 경우의 수를 조합을 이용하여 구하고, 이를 바탕으로 수학적 확률을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이] 주머니에 있는 총 9개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는  ${}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$  이다. 꺼낸 파란 공의 개수를  $b$  , 검은 공의 개수를  $k$  라 할 때,  $b > k$  인 경우를 흰 공의 포함 여부로 나누어 구한다.

(i) 흰 공 1개를 꺼내는 경우: 나머지 8개의 공 중에서 3개를 꺼내고,  $b > k$  를 만족해야 한다. 파란 공 4개와 검은 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 상황이므로,  $(b, k)$  는  $(3, 0)$  또는  $(2, 1)$  이다. 이 경우의 수는  ${}_4C_3 \times {}_4C_0 + {}_4C_2 \times {}_4C_1 = 4 \times 1 + 6 \times 4 = 28$  이다.

(ii) 흰 공을 꺼내지 않는 경우: 파란 공 4개와 검은 공 4개 중에서 4개를 꺼내고,  $b > k$  를 만족해야 한다.  $(b, k)$  는  $(4, 0)$  또는  $(3, 1)$  이다. 이 경우의 수는  ${}_4C_4 \times {}_4C_0 + {}_4C_3 \times {}_4C_1 = 1 \times 1 + 4 \times 4 = 17$  이다.

(i), (ii)에서 구하는 사건의 경우의 수는  $28 + 17 = 45$  이므로, 구하는 확률은  $\frac{45}{126} = \frac{5}{14}$  이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 표본평균의 분포를 구하고 표준정규분포의 대칭성을 이용하여 모집단의 평균을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

모집단이 정규분포  $N(m, 6^2)$  을 따르므로 표본평균  $\bar{X}$  는 정규분포  $N(m, (\frac{6}{\sqrt{9}})^2)$  , 즉  $N(m, 2^2)$  을 따른다.

모집단이 정규분포  $N(15, 5^2)$  을 따르므로 표본평균  $\bar{Y}$  는 정규분포  $N(15, (\frac{5}{\sqrt{25}})^2)$  , 즉  $N(15, 1^2)$  을 따른다.

주어진 확률 조건  $P(\bar{X} \leq 10) = P(\bar{Y} \geq 17)$  을 표준화하면 다음과 같다.

$$P(Z \leq \frac{10-m}{2}) = P(Z \geq \frac{17-15}{1}) = P(Z \geq 2)$$

표준정규분포의 확률밀도함수는  $y$  축에 대하여 대칭이므로  $P(Z \geq 2) = P(Z \leq -2)$  이다.

따라서  $P(Z \leq \frac{10-m}{2}) = P(Z \leq -2)$  이므로  $\frac{10-m}{2} = -2$  이다.

$10 - m = -4$  에서  $m = 14$  를 얻는다.

27. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 일대일함수의 성질을 이해하고, 함숫값의 대수적 성질(합이 3의 배수)을 만족하는 경우를 체계적으로 분류하여 확률을 구할 수 있다.

[풀이]

$X$  에서  $Y$  로의 모든 일대일함수  $f$  의 개수는  $Y$  의 원소 6개 중에서 3개를 선택하여  $X$  의 원소에 일대일로 대응시키는 순열의 수와 같으므로  ${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$  이다.

조건 (가)에 의해  $f(1)$  이 될 수 있는 값은  $Y$  의 원소 중 짝수인 2, 4, 6 이다.  $f(1)$  의 값에 따라 경우를 나누어 조건 (나)를 만족하는 함수의 개수를 구한다.

(i)  $f(1) = 2$  일 때:

$2 + f(2) + f(3)$  이 3의 배수이려면  $f(2) + f(3)$  을 3으로 나눈 나머지가 1이어야 한다.  $f(2), f(3)$  은 집합  $Y - \{2\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$  의 서로 다른 두 원소이다. 이 집합의 원소를 3으로 나눈 나머지로 분류하면 나머지가 0인 집합은  $\{3, 6\}$  , 1인 집합은  $\{1, 4\}$  , 2인 집합은  $\{5\}$  이다. 두 수의 합의 나머지가 1이 되려면 나머지가 각각 0, 1인 두 수를 선택해야 한다. 즉,  $\{3, 6\}$  에서 하나,  $\{1, 4\}$  에서 하나를 선택하여  $f(2), f(3)$  에 대응시키면 되므로 경우의 수는  $2 \times 2 \times 2! = 8$  이다.

(ii)  $f(1) = 4$  일 때:

$4 + f(2) + f(3)$  이 3의 배수이려면  $f(2) + f(3)$  을 3으로 나눈 나머지가 2여야 한다.  $f(2), f(3)$  은 집합  $Y - \{4\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$  의 서로 다른 두 원소이다. 이 집합에서 나머지가 0인 집합은  $\{3, 6\}$  , 1인 집합은  $\{1\}$  , 2인 집합은  $\{2, 5\}$  이다. 두 수의 합의 나머지가 2가 되려면 나머지가 각각 0, 2인 두 수를 선택해야 하므로 경우의 수는  $2 \times 2 \times 2! = 8$  이다.

(iii)  $f(1) = 6$  일 때:

$6 + f(2) + f(3)$  이 3의 배수이려면  $f(2) + f(3)$  이 3의 배수여야 한다.  $f(2), f(3)$  은 집합  $Y - \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  의 서로 다른 두 원소이다. 이 집합에서 나머지가 0인 집합은  $\{3\}$  , 1인 집합은  $\{1, 4\}$  , 2인 집합은  $\{2, 5\}$  이다. 두 수의 합이 3의 배수가 되려면 나머지가 각각 1, 2인 두 수를 선택해야 하므로 경우의 수는  $2 \times 2 \times 2! = 8$  이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족하는 함수  $f$  의 개수는  $8 + 8 + 8 = 24$  이다.

따라서 구하는 확률은  $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$  이다.

## 28. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 중복조합의 개념을 이해하고, 여사건과 정수의 홀짝성을 포함한 복수의 조건을 논리적으로 분석하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 학생 A, B, C가 받는 흰 공의 개수를 각각  $w_A, w_B, w_C$  , 검은 공의 개수를 각각  $b_A, b_B, b_C$  라 하자. 주어진 조건은 다음과 같습니다.

(가)  $w_A + w_B + w_C = 3$  ( $w_i \geq 0$  )이고,  $w_A$  는 홀수입니다. ( $w_A = 1$  또는  $w_A = 3$  )

(나)  $b_A + b_B + b_C = 5$  이고,  $b_A, b_B, b_C$  는 자연수입니다.

(다)  $(w_B + b_B) + (w_C + b_C) = (w_B + w_C) + (b_B + b_C)$  는 짝수입니다. 이는  $(w_B + w_C)$  와  $(b_B + b_C)$  의 홀짝성이 같음을 의미합니다.

조건 (가)에 따라  $w_A$  의 값을 기준으로 경우를 나눕니다.

1)  $w_A = 1$  일 경우:

$w_B + w_C = 2$  이므로  $(w_B + w_C)$  는 짝수입니다. 따라서  $(b_B + b_C)$  도 짝수여야 합니다.

$w_B + w_C = 2$  를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는  ${}_2H_2 = \binom{3}{2} = 3$  가지입니다.

$b_A + b_B + b_C = 5$  에서  $(b_B + b_C)$  가 짝수이므로  $b_A$  는 홀수여야 합니다.  $b_i \geq 1$  이므로  $b_A$  는 1 또는 3입니다.

-  $b_A = 1$  이면  $b_B + b_C = 4$  이고, 자연수 해는  $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$  로 3가지입니다.

-  $b_A = 3$  이면  $b_B + b_C = 2$  이고, 자연수 해는  $(1, 1)$  로 1가지입니다.

따라서 이 경우의 수는  $3 \times (3 + 1) = 12$  가지입니다.

2)  $w_A = 3$  일 경우:

$w_B + w_C = 0$  이므로  $w_B = w_C = 0$  입니다(1가지).  $(w_B + w_C)$  는 짝수이므로,  $(b_B + b_C)$  도 짝수여야 합니다.

검은 공을 나누어 주는 경우의 수는 위와 같이  $b_A$  가 홀수인 경우의 수와 같으므로 4가지입니다.

따라서 이 경우의 수는  $1 \times 4 = 4$  가지입니다.

두 경우의 합은  $12 + 4 = 16$  이므로, 구하는 경우의 수는 16입니다.

## 29. 정답 및 풀이

정답: 172

[출제의도] 독립시행의 확률분포를 이해하고 이를 활용하여 조건부확률을 계산할 수 있는가를 평가한다.

[풀이] 5번의 시행에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수  $X$  라 하면,  $X$  는 이항분포  $B(5, \frac{1}{3})$  을 따른다. 이때 점 P의 최종 좌표는  $2X - (5 - X) = 3X - 5$  가 된다.

점 P의 최종 좌표가 양수인 사건을  $A$  , 앞면이 나온 횟수가 홀수인 사건을  $B$  라 하자. 구하는 확률은  $P(B|A)$  이다.

사건  $A$  가 일어나는 경우는  $3X - 5 > 0$  이므로  $X > \frac{5}{3}$  , 즉  $X$  의 값이 2, 3, 4, 5일 때이다.

사건  $B$  는  $X$  의 값이 1, 3, 5일 때이므로, 사건  $A \cap B$  는  $X$  의 값이 3, 5일 때이다.

$P(X = k) = {}_5C_k (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{5-k}$  이고, 구하는 확률은  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(X=3) + P(X=5)}{P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)}$  이다.

공통 분모  $3^5$  은 약분되므로 각 확률의 분자 부분만 계산하면 다음과 같다.

$$P(X=2) \propto {}_5C_2 \cdot 2^3 = 10 \cdot 8 = 80$$

$$P(X=3) \propto {}_5C_3 \cdot 2^2 = 10 \cdot 4 = 40$$

$$P(X=4) \propto {}_5C_4 \cdot 2^1 = 5 \cdot 2 = 10$$

$$P(X=5) \propto {}_5C_5 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

---

따라서  $P(B|A) = \frac{40+1}{80+40+10+1} = \frac{41}{131}$  이다.  $p = 131, q = 41$  이므로  $p + q = 131 + 41 = 172$  이다.

[4점]

---

### 30. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 주어진 부등식과 수의 홀짝성 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를, 경우를 나누어 조합을 이용하여 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

12 이하의 자연수 중 홀수는  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  의 6개, 짝수는  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$  의 6개이다.

조건 (나)에서 네 자연수의 합이 홀수이므로, 홀수의 개수는 1개 또는 3개여야 한다.

조건 (가)의 부등식은  $x_2 = x_3$  인 경우와  $x_2 < x_3$  인 경우로 나눌 수 있다.

1.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  인 경우:

네 수가 모두 다르므로, 12 이하의 자연수 중 4개를 선택하면 순서쌍이 하나로 결정된다.

(i) 홀수 1개, 짝수 3개 선택:  ${}_6C_1 \times {}_6C_3 = 6 \times 20 = 120$  가지

(ii) 홀수 3개, 짝수 1개 선택:  ${}_6C_3 \times {}_6C_1 = 20 \times 6 = 120$  가지

따라서 이 경우의 수는  $120 + 120 = 240$  이다.

2.  $x_1 < x_2 = x_3 < x_4$  인 경우:

세 개의 서로 다른 자연수  $a, b, c$  를  $a < b < c$  가 되도록 선택하여  $x_1 = a, x_2 = x_3 = b, x_4 = c$  로 정하는 경우이다.

이때  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a + 2b + c$  이고, 합이 홀수이려면  $a + c$  가 홀수여야 한다. 즉,  $a$  와  $c$  는 하나는 홀수, 하나는 짝수여야 한다.

(i)  $a$  는 홀수,  $c$  는 짝수인 경우:

$a = 1$  일 때,  $c$  는 4, 6, 8, 10, 12 가 가능하고  $b$  는  $c - 1 - 1 = c - 2$  가지이다. 총  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$  가지이다.

같은 방식으로  $a = 3, 5, 7, 9, 11$  일 때를 계산하면, 모든 경우의 수는  $30 + 20 + 12 + 6 + 2 + 0 = 70$  가지이다.

(ii)  $a$  는 짝수,  $c$  는 홀수인 경우:

$a = 2$  일 때,  $c$  는 3, 5, 7, 9, 11 이 가능하고  $b$  는  $c - 1 - 2 = c - 3$  가지이다. 총  $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$  가지이다.

같은 방식으로  $a = 4, 6, 8, 10$  일 때를 계산하면, 모든 경우의 수는  $20 + 12 + 6 + 2 + 0 = 40$  가지이다.

따라서 이 경우의 수는  $70 + 40 = 110$  이다.

두 경우에 따라 전체 순서쌍의 개수는  $240 + 110 = 350$  이다.

---