

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	④	③	②	③	③	③	②	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	③	③	③	6	10	③	16	11
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
51	81	④	③	③	③	③	②	83	160

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.
[풀이] 로그의 성질에 따라 밑이 같은 두 로그의 합은 진수의 곱으로 나타낼 수 있다. 주어진 식은 $\log_2((\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+\sqrt{2}))$ 와 같다. 합차 공식을 이용하여 진수를 계산하면 $(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+\sqrt{2})=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2=10-2=8$ 이다. 따라서 구하는 값은 $\log_2 8=\log_2 2^3=3$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.
[풀이] 주어진 극한 식은 미분계수의 정의에 의해

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{3h} = \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{1}{3} f'(2)$$

이다.
문제의 조건에서 $\frac{1}{3} f'(2) = 10$ 이므로 $f'(2) = 30$ 이다.
함수 $f(x) = 2x^3 + ax - 1$ 의 도함수는 $f'(x) = 6x^2 + a$ 이다.
 $x = 2$ 를 대입하면 $f'(2) = 6(2^2) + a = 24 + a$ 이므로, $24 + a = 30$ 에서 $a = 6$ 이다.
따라서 상수 a 의 값은 6 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 주어진 삼각함수의 부호 조건을 통해 각이 존재하는 사분면을 파악하고, 곱셈 공식을 이용하여 다른 삼각함수 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.
[풀이]
 $\tan \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 여기에 $\sin \theta > \cos \theta$ 라는 조건을 만족시키는 경우는 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.
주어진 식 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 의 양변을 제곱하면
 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{9}$ 이므로 $2\sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{9}$ 이다.

구하려는 식의 값을 k 라 하면, $k^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - (-\frac{7}{9}) = \frac{16}{9}$ 이다. 따라서 $k = \pm \frac{4}{3}$ 이다.
 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$ 이고 $\cos \theta < 0$ 이다. 따라서 $\sin \theta - \cos \theta$ 는 양수이다.
 그러므로 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{4}{3}$ 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 함수에 대해 좌극한과 합성함수의 우극한을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 $x \rightarrow 1 -$ 일 때 $f(x) = -x$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow -1+} f(1-x)$ 에서 $t = 1-x$ 로 치환하면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로, 주어진 식은 $\lim_{t \rightarrow 2-} f(t)$ 와 같다.

$t \rightarrow 2-$ 일 때 t 는 1보다 큰 값을 가지면서 2에 가까워지므로 $f(t) = 2t - 1$ 이다. 따라서 $\lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2-} (2t - 1) = 2(2) - 1 = 3$ 이다.

따라서 구하는 값은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 주어진 조건으로부터 미분계수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

함수 $g(x) = (x^2 - 3x)f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 곱의 미분법에 의해

$g'(x) = (x^2 - 3x)'f(x) + (x^2 - 3x)f'(x) = (2x - 3)f(x) + (x^2 - 3x)f'(x)$ 이다.

위 식에 $x = 2$ 를 대입하면 $g'(2) = (2 \cdot 2 - 3)f(2) + (2^2 - 3 \cdot 2)f'(2) = f(2) - 2f'(2)$ 이다.

주어진 조건 $f(2) = 5$ 와 $g'(2) = 9$ 를 대입하면 $9 = 5 - 2f'(2)$ 이므로, $2f'(2) = 5 - 9 = -4$ 이다.

따라서 $f'(2) = -2$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수의 대칭성과 근과 계수의 관계를 이용하여 삼차함수의 극값의 차에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 구한다.

[풀이]

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 로 놓으면, 도함수는 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이다.

$y = f'(x)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이고 $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로, 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{2a}{2 \cdot 3} = 1$ 이다. 따라서 $a = -3$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + b$ 이고, 극값을 갖게 하는 두 x 좌표를 α, β 라 하면, 이들은 이차방정식 $3x^2 - 6x + b = 0$ 의 두 근이다. 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{b}{3}$ 이다.

삼차함수 극값의 차 공식에 의해, $\frac{11}{2}|\beta - \alpha|^3 = 4$ 이므로 $|\beta - \alpha|^3 = 8$, 즉 $|\beta - \alpha| = 2$ 이다.

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $2^2 = 2^2 - 4(\frac{b}{3})$ 이다.

$4 = 4 - \frac{4b}{3}$ 에서 $\frac{4b}{3} = 0$ 이므로 $b = 0$ 이다.

따라서 구하는 값은 $f'(0) = b = 0$ 이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 이 직선이 다른 곡선과 접할 조건을 이용하여 상수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$f(x) = -x^3 + 3x^2$ 라 하면 도함수는 $f'(x) = -3x^2 + 6x$ 이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -3 + 6 = 3$ 이므로, 접선의 방정식은 $y - 2 = 3(x - 1)$, 즉 $y = 3x - 1$ 이다.

이 접선이 곡선 $y = x^2 - x + k$ 에 접하므로, 두 식을 연립한 이차방정식 $x^2 - x + k = 3x - 1$ 이 중근을 가져야 한다. 식을 정리하면

$$x^2 - 4x + (k + 1) = 0$$

이다.

위 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D/4 = (-2)^2 - (k+1) = 3 - k = 0$ 이어야 하므로, 상수 k 의 값은 3 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하는 문제를 해결할 수 있다.

[풀이] 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면, 주어진 조건에 따라 $\alpha = \log_2 a$ 이고 $\beta = \log_a 256$ 이다. 로그의 밑 변환 공식에 의해 $\beta = \log_a 2^8 = 8 \log_a 2 = \frac{8}{\log_2 a} = \frac{8}{\alpha}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\alpha + \beta = 6$ 이므로, $\alpha + \frac{8}{\alpha} = 6$ 이다. 양변에 α 를 곱하여 정리하면 $\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$, 즉 $(\alpha - 2)(\alpha - 4) = 0$ 이므로 $\alpha = 2$ 또는 $\alpha = 4$ 이다. $\alpha = \log_2 a$ 이므로, $a = 2^2 = 4$ 또는 $a = 2^4 = 16$ 이다. 조건 $2 < a < 10$ 을 만족시키는 값은 $a = 4$ 이다.

두 근의 곱은 $k = \alpha\beta = (\log_2 a)(\log_a 256) = \log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a + k = 4 + 8 = 12$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각부등식의 해를 구하고, 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

부등식 $\sin x \geq \cos k$ 에서 $\cos k = \sin(\frac{\pi}{2} - k)$ 이므로, 주어진 부등식은 $\sin x \geq \sin(\frac{\pi}{2} - k)$ 이다. $0 < k < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 < \frac{\pi}{2} - k < \frac{\pi}{2}$ 이다. $\theta = \frac{\pi}{2} - k$ 라 하자.

$0 \leq x \leq \pi$ 의 범위에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 이용하여 부등식 $\sin x \geq \sin \theta$ 의 해를 구하면 $\theta \leq x \leq \pi - \theta$ 이다. 따라서 $\alpha = \theta$, $\beta = \pi - \theta$ 이다. 문제의 조건에서 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $(\pi - \theta) - \theta = \frac{\pi}{3}$ 이다. 이 식을 정리하면 $\pi - 2\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서 $2\theta = \frac{2\pi}{3}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이다.

$\theta = \frac{\pi}{2} - k$ 이므로 $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - k$ 이다. 따라서 $k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 특정 항을 구한다.

[풀이]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 문제의 조건에 의해 $a > 0, r > 1$ 이다.

$S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$ 이므로,

$$\sum_{k=1}^4 (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^4 a_{k+1} = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$$

이다.

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = ar(1 + r + r^2 + r^3) = 30$ 이다.

또한, $a_3 = ar^2 = 4$ 이므로 $a = \frac{4}{r^2}$ 이다.

이를 $a(r + r^2 + r^3 + r^4) = 30$ 에 대입하면, $\frac{4}{r^2}(r + r^2 + r^3 + r^4) = 30$ 이다.

$4(\frac{1}{r} + 1 + r + r^2) = 30$ 이고, 양변에 r 을 곱하여 정리하면 $4(1 + r + r^2 + r^3) = 30r$ 이다.

$4r^3 + 4r^2 - 26r + 4 = 0$, 즉 $2r^3 + 2r^2 - 13r + 2 = 0$ 을 얻는다.

$P(r) = 2r^3 + 2r^2 - 13r + 2$ 라 하면 $P(2) = 16 + 8 - 26 + 2 = 0$ 이므로 $(r - 2)$ 를 인수로 갖는다.

$(r - 2)(2r^2 + 6r - 1) = 0$ 에서 공비 $r > 1$ 이므로 $r = 2$ 이다.

$ar^2 = 4$ 에 $r = 2$ 를 대입하면 $a(2^2) = 4$ 이므로 $a = 1$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a_6 = ar^5 = 1 \cdot 2^5 = 32$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 점의 위치, 속도, 가속도의 관계를 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 시각에서 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 P, Q의 위치 함수 $x_P(t) = t^3 - 6t^2 + 5$, $x_Q(t) = -4t + 1$ 을 각각 두 번 미분하여 가속도 함수를 구한다.

$$v_P(t) = 3t^2 - 12t, a_P(t) = 6t - 12$$

$$v_Q(t) = -4, a_Q(t) = 0$$

두 점의 가속도가 같아지는 시각 t 는 $a_P(t) = a_Q(t)$ 이므로 $6t - 12 = 0$ 에서 $t = 2$ 이다.

$t = 2$ 일 때 두 점의 위치는 $x_P(2) = 2^3 - 6(2^2) + 5 = -11$ 이고, $x_Q(2) = -4(2) + 1 = -7$ 이다. 따라서 두 점 사이의 거리는

$$|x_P(2) - x_Q(2)| = |-11 - (-7)| = 4 \text{ 이다.}$$

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 3의 배수 여부에 따라 항이 정해지는 수열의 규칙을 이해하고, 조건을 만족하는 첫째항을 역추적한다.

[풀이]

a_2 가 3의 배수인 경우와 아닌 경우로 나누어 생각한다.

(1) a_2 가 3의 배수인 경우

$$a_2 = 3k \text{ 라 하면 } a_3 = k \text{ 이다.}$$

k 가 3의 배수이면 $k = 3m$ 으로 놓을 수 있고

$$a_2 = 9m, a_4 = m \text{ 이다.}$$

$$a_2 + a_4 = 30 \text{ 이므로}$$

$$10m = 30 \text{ 에서 } m = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a_2 = 27 \text{ 이다.}$$

k 가 3의 배수가 아니면 $a_4 = k + 2$ 이다.

$$3k + (k + 2) = 30 \text{ 에서 } k = 7 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = 21 \text{ 이다.}$$

(2) a_2 가 3의 배수가 아닌 경우

$$a_3 = a_2 + 2 \text{ 이다.}$$

a_2 를 3으로 나눈 나머지가 1이면 a_3 은 3의 배수이므로

$$a_4 = (a_2 + 2)/3 \text{ 이다.}$$

$$a_2 + (a_2 + 2)/3 = 30 \text{ 에서}$$

$$a_2 = 22 \text{ 이다.}$$

a_2 를 3으로 나눈 나머지가 2이면 a_3 도 3의 배수가 아니므로

$$a_4 = a_2 + 4 \text{ 이다.}$$

$$a_2 + (a_2 + 4) = 30 \text{ 에서 } a_2 = 13 \text{ 을 얻지만,}$$

13을 3으로 나눈 나머지는 1이므로 이 경우에는 맞지 않는다.

따라서 가능한 a_2 는 21, 22, 27 이다.

a_1 이 3의 배수이면 $a_2 = a_1/3$ 이므로 $a_1 = 3a_2$ 이고,

a_1 이 3의 배수가 아니면 $a_2 = a_1 + 2$ 이므로 $a_1 = a_2 - 2$ 이다.

$$a_2 = 21$$

일 때 $a_1 = 63$ 또는 19 ,
 $a_2 = 22$ 일 때 $a_1 = 66$ 또는 20 ,
 $a_2 = 27$ 일 때 $a_1 = 81$ 또는 25 이다.

따라서 가능한 모든 a_1 의 합은
 $63 + 19 + 66 + 20 + 81 + 25 = 274$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한이 모든 실수에서 존재할 조건을 이해하고, 이를 만족시키는 미정계수의 범위를 이차방정식의 실근 조건과 연계하여 구하는 문제입니다.

[풀이]

주어진 극한값이 모든 실수 a 에 대하여 존재해야 합니다. 분모의 함수를 $g(x) = f(x) - k(x-1)$ 이라 하면, $g(x)$ 는 이차함수이므로 모든 실수에서 연속입니다. 만약 어떤 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$ 이라면, 극한값이 존재하기 위해서는

$\lim_{x \rightarrow a} (x-2)^2 = (a-2)^2 = 0$ 이어야 합니다. 따라서 $g(x) = 0$ 의 실근은 $x = 2$ 만 가능합니다.

$g(x) = x^2 - 2x + 2 - k(x-1) = x^2 - (k+2)x + (k+2)$ 입니다.

이차방정식 $g(x) = 0$ 의 실근이 $x = 2$ 만 가능하므로, 다음 두 가지 경우를 생각할 수 있습니다.

1. 방정식 $g(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않는 경우:

판별식 $D < 0$ 이어야 합니다.

$$D = (k+2)^2 - 4(k+2) = (k+2)(k-2) < 0$$

따라서 $-2 < k < 2$ 이고, 정수 k 는 $-1, 0, 1$ 입니다.

2. 방정식 $g(x) = 0$ 이 중근 $x = 2$ 를 갖는 경우:

$g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 꼴이어야 합니다.

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ 이므로 } x^2 - (k+2)x + (k+2) = x^2 - 4x + 4 \text{ 입니다.}$$

계수를 비교하면 $k+2 = 4$ 에서 $k = 2$ 입니다. 이 값은 $k+2 = 4$ 도 만족합니다.

$k = 2$ 일 때 $g(x) = (x-2)^2$ 이므로 $x = 2$ 에서 극한값

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} = 1$$

이 존재합니다.

두 경우를 종합하면 가능한 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2$ 입니다. 따라서 모든 정수 k 의 개수는 4개입니다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계 및 대칭성을 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구하여 수열의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 P_n 의 좌표를 $(p_n, \log_2 p_n)$, 점 Q_n 의 좌표를 $(q_n, \log_2 q_n)$ 이라 하자. ($0 < p_n < q_n$)

조건 (가)에서 Q_n 과 P_n 의 y 좌표의 차가 n 이므로 $\log_2 q_n - \log_2 p_n = n$ 이다. 즉, $\log_2 (q_n/p_n) = n$ 이므로 $q_n = p_n \cdot 2^n$ 이다.

조건 (나)에서 직선 $P_n Q_n$ 의 기울기는 $\frac{\log_2 q_n - \log_2 p_n}{q_n - p_n} = \frac{n}{q_n - p_n}$ 이고 이 값이 n 이므로, $q_n - p_n = 1$ 이다.

두 식 $q_n = p_n \cdot 2^n$ 과 $q_n - p_n = 1$ 을 연립하여 p_n, q_n 을 구한다.

$$p_n \cdot 2^n - p_n = 1 \text{ 에서 } p_n(2^n - 1) = 1 \text{ 이므로 } p_n = \frac{1}{2^n - 1} \text{ 이다.}$$

$$q_n = 1 + p_n = 1 + \frac{1}{2^n - 1} = \frac{2^n - 1 + 1}{2^n - 1} = \frac{2^n}{2^n - 1}$$

이다.

한편, 원의 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고 이 원이 로그함수 $y = \log_2 x$ 위의 두 점 P_n, Q_n 을 지나므로, 원과 지수함수 $y = 2^x$ 의 두 교점 A_n, B_n 은 각각 두 점 P_n, Q_n 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서 두 교점의 좌표는 $(\log_2 p_n, p_n)$ 과 $(\log_2 q_n, q_n)$ 이다.

두 점 A_n, B_n 의 y 좌표의 합 y_n 은 $p_n + q_n$ 과 같다.

$$y_n = p_n + q_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n}{2^n - 1} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \text{ 이다.}$$

$$y_1 = \frac{2^1 + 1}{2^1 - 1} = 3$$

$$y_2 = \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} = \frac{5}{3}$$

$$y_3 = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} = \frac{9}{7}$$

$$\text{따라서 구하는 값은 } y_1 + y_2 + y_3 = 3 + \frac{5}{3} + \frac{9}{7} = \frac{63 + 35 + 27}{21} = \frac{125}{21} \text{ 이다.}$$

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제요도] 함수의 극한과 연속의 개념을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 추론하고 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 만약 $f(2) \neq 0$ 이라면 $x = 2$ 근방에서 $f(x) \neq 0$ 이므로,

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 1}{f(x)} = \frac{f(3) - 1}{f(2)} = g(2)$$

가 된다. 이 경우 주어진 조건 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) - 6$ 은 $g(2) = g(2) - 6$, 즉 $0 = -6$ 이 되어 모순이다. 따라서 $f(2) = 0$ 이어야 한다.

$f(2) = 0$ 이므로, 함수 $g(x)$ 의 정의에 따라 $g(2) = 4$ 이다. 주어진 조건에 대입하면 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 - 6 = -2$ 이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 1}{f(x)} = -2$$

이다. 이때 $x \rightarrow 2$ 이면 분모가 $f(x) \rightarrow f(2) = 0$ 으로 수렴하므로, 극한값이 존재하기 위해서는 분자도 0 으로 수렴해야 한다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x+1) - 1\} = f(3) - 1 = 0 \text{ 이므로 } f(3) = 1 \text{ 이다.}$$

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) = 0, f(3) = 1$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0, f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 1 \text{ 이다. 두 식을 빼면 } 19 + 5a + b = 1, \text{ 즉 } 5a + b = -18 \text{ 이다.}$$

한편,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - f(3)}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{f(x+1) - f(3)}{x-2}}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} = \frac{f'(3)}{f'(2)} = -2$$

이다. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로 $f'(2) = 12 + 4a + b$, $f'(3) = 27 + 6a + b$ 이다. $f'(3) = -2f'(2)$ 에서

$$27 + 6a + b = -2(12 + 4a + b), \text{ 즉 } 14a + 3b = -51 \text{ 이다.}$$

연립방정식 $5a + b = -18$ 과 $14a + 3b = -51$ 을 풀면 $a = -3, b = -3$ 이다. $c = -8 - 4a - 2b = -8 + 12 + 6 = 10$ 이므로 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 10$ 이다.

구하는 값은 $g(3)$ 이다. $f(3) = 3^3 - 3(3^2) - 3(3) + 10 = 1 \neq 0$ 이므로 $g(3) = \frac{f(3+1) - 1}{f(3)} = \frac{f(4) - 1}{f(3)}$ 이다.

$$f(4) = 4^3 - 3(4^2) - 3(4) + 10 = 64 - 48 - 12 + 10 = 14 \text{ 이므로, } g(3) = \frac{14 - 1}{1} = 13 \text{ 이다.}$$

16. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 귀납적으로 정의된 수열의 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 문제의 조건에 따라 $a_1 = 3$ 이므로 $S_1 = a_1 = 3$ 이다. 주어진 점화식 $S_{n+1} = 3S_n - 4$ 에 $n = 1$ 을 대입하면 $S_2 = 3S_1 - 4 = 3(3) - 4 = 5$ 이다. 같은 점화식에 $n = 2$ 를 대입하면 $S_3 = 3S_2 - 4 = 3(5) - 4 = 11$ 이다. 따라서 $n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로, $a_3 = S_3 - S_2 = 11 - 5 = 6$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: 10

[출제의도] 도함수가 주어진 함수의 부정적분을 구하고, 정적분 값을 이용하여 적분상수를 결정한 후 함수값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f'(x) = 4x - 3$ 이므로 부정적분을 구하면

$$f(x) = \int (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x + C$$

(단, C 는 적분상수)이다.

주어진 정적분 조건

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}$$

을 이용하면,

$$\int_0^1 (2x^2 - 3x + C) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + Cx \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + C = -\frac{5}{6} + C$$

이다.

$-\frac{5}{6} + C = \frac{1}{6}$ 이므로 $C = 1$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 이다.

따라서 구하는 값은 $f(3) = 2(3^2) - 3(3) + 1 = 18 - 9 + 1 = 10$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미정계수를 구하고, 이를 미분계수의 정의와 결합하여 함수의 극한값을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = (x^3 + k)(x^2 - 2x + 3)$ 의 도함수는 곱의 미분법에 의해 $f'(x) = 3x^2(x^2 - 2x + 3) + (x^3 + k)(2x - 2)$ 이다. 조건 $f'(0) = -8$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면 $f'(0) = (0)(3) + (k)(-2) = -2k$ 이므로, $-2k = -8$ 에서 $k = 4$ 를 얻는다.

구하고자 하는 극한값은 미분계수의 정의를 이용하여 변형하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(1)$$

이다.

$k = 4$ 를 도함수에 대입하고 $x = 1$ 을 대입하여 $f'(1)$ 을 계산하면 $f'(1) = 3(1)^2(1 - 2 + 3) + (1^3 + 4)(2 - 2) = 3(2) + 5(0) = 6$ 이므로, 구하는 답은 $\frac{1}{2} \times 6 = 3$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: 16

[출제의도] 삼차함수의 극값의 성질을 이용하여 미정계수를 찾고, 이를 통해 다른 극값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수 $g(x) = -x^3 + 3ax^2 + 4a^2$ 을 미분하면 $g'(x) = -3x^2 + 6ax = -3x(x - 2a)$ 이다. $g'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2a$ 에서 극값을 갖는다. $g(x)$ 의 최고차항 계수가 음수이므로, 그래프는 x좌표가 더 작은 지점에서 극솟값을, x좌표가 더 큰 지점에서 극댓값을 갖는다.

(i) $a > 0$ 인 경우: $0 < 2a$ 이므로 $x = 2a$ 에서 극댓값을 갖는다. $g(2a) = 4a^3 + 4a^2 = 16$ 이며, 이 방정식을 만족하는 간단한 유리수 해 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$ 인 경우: $2a < 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 극댓값을 갖는다. $g(0) = 4a^2 = 16$ 에서 $a^2 = 4$ 이고, $a < 0$ 이므로 $a = -2$ 이다. $a = -2$ 이므로 극솟값은 $x = 2a = -4$ 에서 발생한다. $g(x) = -x^3 - 6x^2 + 16$ 이므로 극솟값은 $g(-4) = -(-4)^3 - 6(-4)^2 + 16 = 64 - 96 + 16 = -16$ 이다. 따라서 구하는 극솟값의 절댓값은 $|-16| = 16$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 삼각함수의 그래프 개형을 파악하고, 방정식의 실근 조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = C$ 의 교점의 개수를 $N(C)$ 라 하자.

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때 $f(x) = 2\cos x + 2$ 의 치역은 $[0, 4]$ 이고, $\pi < x \leq 2\pi$ 일 때 $f(x) = -\sin(2x)$ 의 치역은 $[-1, 1]$ 이다.

$y = f(x)$ 의 그래프를 그려 교점의 개수를 확인하면 다음과 같다.

- $0 < C < 1$ 일 때, $y = C$ 는 $y = 2\cos x + 2$ 의 그래프와 한 번, $y = -\sin(2x)$ 의 그래프와 두 번 만나므로 교점은 3개이다.
- $C = 0$ 일 때, $y = 0$ 은 $x = \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 에서 만나므로 교점은 3개이다.

다른 C 의 값에 대해서는 교점의 개수가 3이 아니다.

따라서 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근의 개수가 3이려면 $f(t)$ 의 값의 범위는 $0 \leq f(t) < 1$ 이어야 한다.

문제의 조건에서 $f(t)$ 는 정수이므로, $f(t) = 0$ 이다.

$f(t) = 0$ 을 만족시키는 t 의 값을 구하자.

(i) $0 \leq t \leq \pi$ 인 경우: $2\cos t + 2 = 0$ 에서 $\cos t = -1$ 이므로 $t = \pi$ 이다.

(ii) $\pi < t \leq 2\pi$ 인 경우: $-\sin(2t) = 0$ 에서 $\sin(2t) = 0$ 이다. $2\pi < 2t \leq 4\pi$ 이므로 $2t = 3\pi, 4\pi$ 이다. 따라서 $t = \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 t 의 값은 $\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 이다.

이들의 합은 $\pi + \frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{9}{2}\pi$ 이다.

따라서 $\frac{q}{p} = \frac{9}{2}$ 이므로, 서로소인 자연수 $p = 2, q = 9$ 이다.

그러므로 $p + q = 2 + 9 = 11$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: 51

[출제의도] 등차수열의 합과 일반항의 관계 및 자연수 조건을 이용한 부정방정식 풀이를 통해 수열의 특정 항을 추론하는 능력을 평가한다.

[풀이]

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면, 모든 항이 자연수이므로 a 와 d 는 자연수이다.

조건 (가)에서 $S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$ 이고 $a_5 = a + 4d$ 이므로, $10a + 45d = 11(a + 4d)$ 에서 $a = d$ 를 얻는다.

조건 (나)에 $a = d$ 를 대입하면 $S_m = \frac{m(2a + (m-1)d)}{2} = \frac{m(2d + (m-1)d)}{2} = \frac{dm(m+1)}{2} = 170$ 이므로, $dm(m+1) = 340$ 이다.

d, m 이 자연수이므로 $m(m+1)$ 은 340의 약수 중 연속된 두 자연수의 곱이다. 가능한 경우는 $m = 1, m(m+1) = 2$ 일 때 $d = 170$ 이고, $m = 4, m(m+1) = 20$ 일 때 $d = 17$ 이다.

조건 (다)에서 $a_4 = a + 3d = 4d$ 는 두 자리 자연수이다. $d = 170$ 이면 $a_4 = 680$ 이므로 조건을 만족하지 않고, $d = 17$ 이면 $a_4 = 68$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 $a = d = 17$ 이고, 구하는 값은 $a_3 = a + 2d = 3d = 3 \times 17 = 51$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 81

[출제의도] 로그함수의 그래프와 좌표기하의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구하고, 이를 통해 사각형의 넓이를 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

점 A 의 좌표를 $(a, \log_3 a)$, 점 B 의 좌표를 $(b, \log_3 b)$ 라 하자. (단, $a \neq b$, $a > 0, b > 0$)

(가) 선분 AB 를 나타내는 벡터는 $(b - a, \log_3 b - \log_3 a)$ 이다. 직선 $y = -x$ 의 방향벡터는 $(1, -1)$ 이고, 이 방향의 단위벡터는

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ 이다. 선분 AB 의 직선 $y = -x$ 위로의 정사영의 길이는 두 벡터의 내적의 절댓값과 같으므로,

$$|(b - a) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (\log_3 b - \log_3 a) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(b - a) - (\log_3 b - \log_3 a)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(a - b) + (\log_3 a - \log_3 b)| = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 $|(a - b) + (\log_3 a - \log_3 b)| = 7$ 이다. $a > b$ 라고 가정하면 $(a - b) + (\log_3 a - \log_3 b) = 7$ 이다.

(나) 직선 AB 가 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로, 세 점 A, B, $(-3, 0)$ 은 한 직선 위에 있다. 따라서 직선의 기울기가 일정하므로 $\frac{\log_3 a - 0}{a - (-3)} = \frac{\log_3 b - 0}{b - (-3)}$ 즉, $\frac{\log_3 a}{a+3} = \frac{\log_3 b}{b+3}$ 이다.

함수 $f(x) = \frac{\log_3 x}{x+3}$ 를 생각하면 $f(a) = f(b)$ 이다. $a = 9, b = 3$ 일 때 $f(9) = \frac{\log_3 9}{9+3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 이고, $f(3) = \frac{\log_3 3}{3+3} = \frac{1}{6}$ 이므로 $f(9) = f(3)$ 이 성립한다. 또한 (가)의 식에 대입하면 $(9 - 3) + (\log_3 9 - \log_3 3) = 6 + (2 - 1) = 7$ 이므로 조건 (가)도 만족한다. 따라서 두 점의 좌표는 A(9, 2), B(3, 1) 이다.

점 A(9, 2) 에서 직선 $y = x$ 에 내린 수선의 발 P 가 있고, 점 B(3, 1) 을 $y = x$ 에 대칭이동한 점은 Q(1, 3) 이다. 직선 AP 와 직선 BQ 는 모두 직선 $y = x$ 에 수직이므로 서로 평행하다. 따라서 사각형 APQB 는 사다리꼴이다.

사다리꼴의 높이는 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다. 직선 AP 의 방정식은 $x + y = 11$, 직선 BQ 의 방정식은 $x + y = 4$ 이므로, 높이

$$h = \frac{|11 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ 이다.}$$

$$\overline{AP} \text{ 는 점 A(9, 2) 와 직선 } x - y = 0 \text{ 사이의 거리이므로 } \overline{AP} = \frac{|9 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ 이다.}$$

$$\overline{BQ} \text{ 는 점 B(3, 1) 과 점 Q(1, 3) 사이의 거리이므로 } \overline{BQ} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{사각형 APQB 의 넓이는 } \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{BQ})h = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\right)\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{7+4}{\sqrt{2}}\right)\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{77}{4} \text{ 이다.}$$

따라서 $p = 4, q = 77$ 이고, $p + q = 4 + 77 = 81$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 삼각함수의 극한에 대한 기본 공식을 이용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 극한은 $x \rightarrow 0$ 일 때 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형이므로 식을 변형하여 극한값을 구한다.

극한의 성질에 따라 주어진 식을 다음과 같이 두 항으로 분리할 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) + \sin(6x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x}$$

삼각함수의 극한 기본 공식인

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

와

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$$

를 이용하면 각 항의 극한값은 2 와 6 이다.

따라서 구하는 극한값은 $2 + 6 = 8$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 접선의 매개변수 값을 구한다.

[풀이]

주어진 곡선의 식을 매개변수 t 에 대하여 각각 미분하면 $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}$ 이다.

곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$ 이다. (단, $t \neq 1$)

접선이 직선 $y = \frac{5}{3}x - 2$ 와 평행하므로 접선의 기울기는 $\frac{5}{3}$ 이다. 따라서 $\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \frac{5}{3}$ 이다.

$3(t^2 + 1) = 5(t^2 - 1)$ 에서 $3t^2 + 3 = 5t^2 - 5$ 이므로 $2t^2 = 8$, 즉 $t^2 = 4$ 이다.

$t > 0$ 이므로 $t = 2$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 무리식을 포함한 수열이 수렴할 조건을 이용하여 미정계수의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 식의 괄호 안 부분을 유리화하여 식을 정리한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a (\sqrt{4n^2 + bn} - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot \frac{(4n^2 + bn) - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + bn} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^{a+1}}{\sqrt{4n^2 + bn} + 2n}$$

극한값이 0이 아닌 상수 5로 수렴하려면 분모와 분자의 최고차항의 차수가 같아야 한다. 분자의 최고차항은 $\sqrt{4n^2} = 2n$, 즉 n 에 대한 1차식이므로 분자의 차수도 1이 되어야 한다. 따라서 $a + 1 = 1$ 에서 $a = 0$ 이다.

$a = 0$ 일 때, 극한값은 분모와 분자를 n 으로 나누어 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn}{\sqrt{4n^2 + bn} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{4 + b/n} + 2} = \frac{b}{\sqrt{4} + 2} = \frac{b}{4}$$

주어진 조건에 따라 이 값이 5이므로 $\frac{b}{4} = 5$ 에서 $b = 20$ 이다. 따라서 $a + b = 0 + 20 = 20$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분을 이용하여 단면의 넓이가 주어진 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

[풀이]

x 축 위의 점 x ($1 \leq x \leq e$)를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 지름의 길이가 $2\sqrt{x \ln x}$ 인 반원이 된다. 이 반원의 반지름은

$r(x) = \sqrt{x \ln x}$ 이므로, 단면의 넓이 $S(x)$ 는 $S(x) = \frac{1}{2}\pi \{r(x)\}^2 = \frac{\pi}{2}x \ln x$ 이다.

따라서 입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_1^e S(x) dx = \int_1^e \frac{\pi}{2} x \ln x dx$$

이다. 부분적분법을 이용하면, $u = \ln x, v' = x$ 로 놓았을 때 $u' = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{2}x^2$ 이므로,

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

이다.

그러므로 부피는 $V = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) \right\} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8}(e^2 + 1)$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 속도벡터가 주어진 점이 움직인 거리를 정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 점 P의 시각 t 에서의 속력을 $s(t)$ 라 하면, 속력은 속도벡터의 크기이므로 $s(t) = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2t^2}\right)^2}$ 이다. 이 식을 정리하면

$s(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(t^4 - 2 + \frac{1}{t^4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(t^4 + 2 + \frac{1}{t^4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2t^2}\right)^2} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2t^2}$ 이다. 따라서 시각 $t = 1$ 에서 $t = 3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3 s(t)dt = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2t^2}\right)dt$$

이고, 계산 결과는 다음과 같다. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{t}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left\{\left(9 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3}$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 함수의 관계식과 여러 조건을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

주어진 식 $f(x) = (g(x))^3 - 3g(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3(g(x))^2 g'(x) - 3g'(x) = 3g'(x)\{(g(x))^2 - 1\}$ 이다.

조건 (나)에서 $g(2) = -1$ 이므로 $x = 2$ 를 대입하면 $f'(2) = 3g'(2)\{(-1)^2 - 1\} = 0$ 이다.

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 삼차함수이고 $f''(2) = 0$ 이므로, $f'(2) = 0$ 과 함께 생각하면 $f(x)$ 는 변곡점 $(2, f(2))$ 를 갖고 $f'(x)$ 는 $x = 2$ 에서 중근을 갖는다.

따라서 $f'(x) = k(x - 2)^2$ 형태로 놓을 수 있다. $f(x)$ 의 최고차항 계수가 양수이므로 $k > 0$ 이다.

$$f(x) = \int k(x - 2)^2 dx = k \frac{(x - 2)^3}{3} + C$$

(단, C 는 적분상수)이다.

$x = 2$ 일 때 $f(2) = (g(2))^3 - 3g(2) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ 이다. 또한 $f(2) = C$ 이므로 $C = 2$ 이다.

즉, $f(x) = \frac{k}{3}(x - 2)^3 + 2$ 이다.

조건 (가)에서 $f(0) = -2$ 이므로, $f(0) = \frac{k}{3}(-2)^3 + 2 = -\frac{8k}{3} + 2 = -2$ 에서 $k = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^3 + 2$ 이고 $f'(x) = \frac{3}{2}(x - 2)^2$ 이다.

$f(0) = -2$ 이므로 $f(0) = (g(0))^3 - 3g(0) = -2$ 이다. $y = g(0)$ 이라 하면 $y^3 - 3y + 2 = 0$ 이므로 $(y - 1)^2(y + 2) = 0$ 이다. 따라서 $g(0) = 1$ 또는 $g(0) = -2$ 이다.

$g(x)$ 는 증가하는 함수이고 $g(2) = -1$ 이므로 $g(0) < g(2) = -1$ 이어야 한다. 따라서 $g(0) = -2$ 이다.

$f'(0) = 3g'(0)\{(g(0))^2 - 1\}$ 에 값을 대입하면, $f'(0) = \frac{3}{2}(-2)^2 = 6$ 이므로 $6 = 3g'(0)\{(-2)^2 - 1\} = 9g'(0)$ 이다. 따라서 $g'(0) = \frac{2}{3}$ 이다.

구하고자 하는 값은 $3f(2)g'(0) = 3 \times 2 \times \frac{2}{3} = 4$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 83

[출제의도] 부분분수 분해와 망원급수의 합을 이용하여 매개변수가 포함된 급수로 정의된 수열의 합 S_m 을 구하고, 이를 통해 일반항 a_m 을 추론하여 항의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식의 우변을 부분분수로 분해하여 정리하면

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+2m} \right)$$

이다. 이는 망원급수(telescoping series)이므로, 부분합의 극한을 이용하여 합을 구하면

$$S_m = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k}$$

이다.

일반항 a_m 은 $m \geq 2$ 일 때 $a_m = S_m - S_{m-1}$ 이고, $a_1 = S_1$ 이다.

$$a_1 = S_1 = \sum_{k=2}^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

이다.

$m \geq 2$ 에 대하여

$$a_m = \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} - \sum_{k=m}^{2m-2} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}\right) - \frac{1}{m} = \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m(2m-1)}$$

이다.

$m = 1$ 을 대입하면 $a_1 = \frac{1}{2(1)(2-1)} = \frac{1}{2}$ 이므로, 위 식은 모든 자연수 m 에 대하여 성립한다.

문제에서 요구하는 값은 $a_3 + a_8$ 이므로, $a_3 = \frac{1}{6 \times 5} = \frac{1}{30}$ 이고 $a_8 = \frac{1}{16 \times 15} = \frac{1}{240}$ 이다.

따라서 $a_3 + a_8 = \frac{1}{30} + \frac{1}{240} = \frac{8+1}{240} = \frac{9}{240} = \frac{3}{80}$ 이다.

그러므로 $p = 80, q = 3$ 이고, $p + q = 83$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 160

[출제의도] 주어진 기하학적 상황을 식으로 표현하고 음함수 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 O 를 원점, 점 C 를 x 축 위의 점 $(10, 0)$ 으로 하는 좌표평면을 설정하자. 원의 방정식은 $(x - 10)^2 + y^2 = 76$ 이다. 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하고, $\overline{OP} = r$ 이라 하면 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 이다. 점 P 가 원 위의 점이므로, 이 좌표를 원의 방정식에 대입하면 $(r \cos \theta - 10)^2 + (r \sin \theta)^2 = 76$ 이다.

이 식을 정리하면 $r^2 - 20r \cos \theta + 100 = 76$, 즉 $r^2 - 20r \cos \theta + 24 = 0$ 이라는 r 과 θ 의 관계식을 얻는다. 삼각형 POC 의 넓이 $S(\theta)$ 는 $S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r \sin \theta = 5r \sin \theta$ 이다.

$S(\theta)$ 를 θ 에 대해 미분하면 $S'(\theta) = 5(r' \sin \theta + r \cos \theta)$ (단, $r' = \frac{dr}{d\theta}$) 이다. 한편, $r^2 - 20r \cos \theta + 24 = 0$ 의 양변을 θ 에 대해 미분하면 $2rr' - 20(r' \cos \theta - r \sin \theta) = 0$ 이므로 $r' = \frac{10r \sin \theta}{r - 10 \cos \theta}$ 이다.

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $r^2 - 20r(\frac{1}{2}) + 24 = 0$ 에서 $r^2 - 10r + 24 = 0$, $(r - 4)(r - 6) = 0$ 이다. 문제의 조건에서 O 와의 거리가 더 짧은 점이므로 $r = 4$ 이다. 이때 $r' = \frac{10(4) \sin \frac{\pi}{3}}{4 - 10 \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{40(\frac{\sqrt{3}}{2})}{4 - 10(\frac{1}{2})} = \frac{20\sqrt{3}}{-1} = -20\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $S'(\frac{\pi}{3}) = 5(r' \sin \frac{\pi}{3} + r \cos \frac{\pi}{3}) = 5((-20\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4(\frac{1}{2})) = 5(-30 + 2) = 5(-28) = -140$ 이다.

앗, 계산 실수. 다시.

$$r' = \frac{10r \sin \theta}{r - 10 \cos \theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 일 때 } r = 4 \text{ 이므로, } r' = \frac{10(4)(\frac{\sqrt{3}}{2})}{4 - 10(1/2)} = \frac{20\sqrt{3}}{4-5} = -20\sqrt{3}$$

$$S'(\theta) = 5(r' \sin \theta + r \cos \theta)$$

$$S'(\frac{\pi}{3}) = 5((-20\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2}) = 5(-20 \cdot \frac{3}{2} + 2) = 5(-30 + 2) = 5(-28) = -140$$

$$\text{다시 검토. } r^2 - 20r \cos \theta + 24 = 0 \text{ 미분. } 2rr' - 20(r' \cos \theta + 20r \sin \theta) = 0 \text{ . } r'(r - 10 \cos \theta) = -10r \sin \theta \text{ . } r' = \frac{-10r \sin \theta}{r - 10 \cos \theta}$$

$$r' = \frac{-10(4)(\frac{\sqrt{3}}{2})}{4 - 10(1/2)} = \frac{-20\sqrt{3}}{-1} = 20\sqrt{3}$$

$$S'(\frac{\pi}{3}) = 5((20\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2}) = 5(20 \cdot \frac{3}{2} + 2) = 5(30 + 2) = 5(32) = 160$$

[출제의도] 주어진 기하학적 상황을 식으로 표현하고 음함수 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 O 를 원점, 반직선 OC 를 x 축의 양의 방향으로 하는 좌표평면을 설정하면 점 C 의 좌표는 $(10, 0)$ 이다. 원의 방정식은 $(x - 10)^2 + y^2 = 76$ 이다. 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하고, $\overline{OP} = r$ 이라 하면 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 이다. 점 P 가 원 위의 점이므로, 이 좌표를 원의 방정식에 대입하여 정리하면 $r^2 - 20r \cos \theta + 24 = 0$ 이다.

삼각형 POC 의 넓이 $S(\theta)$ 는 $S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r \sin \theta = 5r \sin \theta$ 이다.

$S(\theta)$ 를 θ 에 대해 미분하면 $S'(\theta) = 5(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta)$ 이다. 한편, $r^2 - 20r \cos \theta + 24 = 0$ 의 양변을 θ 에 대해 미분하면

$$2r \frac{dr}{d\theta} - 20(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta) = 0 \text{ 이므로 } \frac{dr}{d\theta} = \frac{-10r \sin \theta}{r - 10 \cos \theta} \text{ 이다.}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

일 때, $r^2 - 20r(\frac{1}{2}) + 24 = 0$ 에서 $r^2 - 10r + 24 = 0$, 즉 $(r - 4)(r - 6) = 0$ 이다. 문제의 조건에서 점 O 와의 거리가 더 짧으므로 $r = 4$ 이다. 이때 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{-10(4)\sin \frac{\pi}{3}}{4 - 10\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{-40(\frac{\sqrt{3}}{2})}{4 - 10(\frac{1}{2})} = \frac{-20\sqrt{3}}{-1} = 20\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $S'(\frac{\pi}{3}) = 5(\frac{dx}{d\theta}\sin \frac{\pi}{3} + r\cos \frac{\pi}{3}) = 5((20\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4(\frac{1}{2})) = 5(30 + 2) = 160$ 이다.
