

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	④	②	③	④	①	②	③	③	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	④	③	③	②	3	18	12	31	③
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
69	7	③	③	④	③	②	③	100	531

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 거듭제곱근을 유리수 지수로 변환하고 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

$$a = \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} \quad \text{이고} \quad b = \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}} \quad \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{b} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{6}}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 5^{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \text{이다.}$$

$$\text{구하는 값은 } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^1 = 5 \quad \text{이다.}$$

2. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 미분계수의 정의를 변형된 형태로 이해하고, 이를 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 x^2 의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다. 이때 $f'(x) = 2x + a$ 이다.

조건 (나)의 극한 식을 미분계수의 정의를 이용하여 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}f'(2)$$

따라서 $-\frac{1}{3}f'(2) = -1$ 이므로 $f'(2) = 3$ 이다. $f'(2) = 2(2) + a = 4 + a$ 이므로 $4 + a = 3$ 에서 $a = -1$ 을 얻는다.구하고자 하는 값은 $f'(4)$ 이고 $f'(x) = 2x - 1$ 이므로, $f'(4) = 2(4) - 1 = 7$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 시그마의 선형적 성질을 이용하여 두 수열의 합에 대한 연립방정식을 해결할 수 있다.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = A$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = B$$

라 하면, 시그마의 성질에 따라 주어진 조건은 $A + B = 30$ 과 $2A - B = 15$ 이다. 두 식을 연립하여 풀면 $A = 15$, $B = 15$ 를 얻는다. 따라서 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k) = A - 2B = 15 - 2(15) = -15$$

이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 함수값과 우극한을 계산하고, 주어진 등식을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 먼저 함수값 $f(-2)$ 와 우극한 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ 를 각각 구한다.

$x = -2$ 는 $-2 \leq -1$ 이므로 $f(-2) = 2(-2) + k = -4 + k$ 이다.

$x \rightarrow -1+$ 는 x 가 -1 보다 큰 값을 가지면서 -1 에 한없이 가까워지는 경우이므로 $f(x) = x^2 - 5$ 를 이용한다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - 5) = (-1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \text{ 이다.}$$

주어진 조건 $f(-2) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -6$ 에 구한 값을 대입하면 $(-4 + k) + (-4) = -6$ 이므로 $k - 8 = -6$ 에서 $k = 2$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

등비수열 a_n 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 모든 항이 양수이므로 $a > 0$, $r > 0$ 이다.

조건 $\frac{S_4}{S_2} = 5$ 에서 $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 이므로 $\frac{a(r^4 - 1)/(r - 1)}{a(r^2 - 1)/(r - 1)} = \frac{r^4 - 1}{r^2 - 1} = r^2 + 1$ 이다. 따라서 $r^2 + 1 = 5$ 에서 $r^2 = 4$ 이고, $r > 0$ 이므로 $r = 2$ 이다.

조건 $a_2 a_4 = 144$ 에서 $(ar)(ar^3) = a^2 r^4 = 144$ 이다. $r = 2$ 를 대입하면 $a^2 \times 2^4 = 16a^2 = 144$ 이므로 $a^2 = 9$ 이고, $a > 0$ 이므로 $a = 3$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a_6 = ar^5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 삼각함수의 각 변환 공식과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 특정 삼각함수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 조건 $\tan(\pi - \theta) = -\frac{3}{4}$ 에서, 각 변환 공식에 따라 $-\tan \theta = -\frac{3}{4}$ 이므로 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이다. 다른 조건

$\sin \theta + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) < 0$ 에서, 각 변환 공식에 따라 $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ 이므로, 부등식은 $2\sin \theta < 0$ 즉 $\sin \theta < 0$ 이 된다.

$\tan \theta > 0$ 이고 $\sin \theta < 0$ 이므로 각 θ 는 제3사분면의 각이다. 삼각함수 사이의 관계식 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 를 이용하면,

$$\sec^2 \theta = 1 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{25}{16} \text{ 이다. 따라서 } \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \text{ 이다.}$$

θ 가 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$ 이다. 그러므로 구하는 값은 $\cos \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ 이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 함수의 정의역이 미지수를 경계로 나뉘는 경우, 함수의 연속성 조건을 이용하여 모든 미지수의 값의 곱을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x = k$ 에서 연속이어야 한다. 함수의 연속 조건에 따라 $x = k$ 에서의 좌극한과 함수값이 같아야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow k-} f(x) = f(k)$ 가 성립해야 한다. 좌극한은 $\lim_{x \rightarrow k-} x^2 = k^2$ 이고, 함수값은 $f(k) = 3k + 10$ 이다.

따라서 $k^2 = 3k + 10$ 이라는 방정식을 얻을 수 있다. 이 식을 정리하면 $k^2 - 3k - 10 = 0$ 이고, $(k - 5)(k + 2) = 0$ 으로 인수분해된다. 이를 만족하는 k 의 값은 $k = 5$ 또는 $k = -2$ 이다. 따라서 모든 상수 k 의 값의 곱은 $5 \times (-2) = -10$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분으로 정의된 상수를 포함하는 도함수로부터 부정적분을 이용하여 원래 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건에서

$$\int_{-1}^1 f(t) dt$$

는 상수이므로 이 값을 C 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + C$ 이다.

$f(x)$ 는 $f'(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$f(x) = \int (3x^2 + C) dx = x^3 + Cx + D$$

(D 는 적분상수)로 놓을 수 있다.

조건 $f(0) = 1$ 에서 $f(0) = 0^3 + C \cdot 0 + D = D = 1$ 이므로 $f(x) = x^3 + Cx + 1$ 이다.

$$C = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

의 정의에 $f(x)$ 를 대입하면

$$C = \int_{-1}^1 (t^3 + Ct + 1) dt$$

이다.

t^3 과 Ct 는 기함수이므로

$$\int_{-1}^1 (t^3 + Ct) dt = 0$$

이다. 따라서

$$C = \int_{-1}^1 1 dt = [t]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$$

이다.

완성된 함수식은 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ 이다.

따라서 $f(2) = 2^3 + 2(2) + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 부정적분과 도함수의 관계 및 곱의 미분법을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

[풀이]

$F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로 $F'(x) = f(x)$ 이고, $G(x)$ 가 $F(x) + xf(x) + 2x$ 의 한 부정적분이므로

$G'(x) = F(x) + xf(x) + 2x$ 이다. 한편 곱의 미분법에 의해 $(xF(x))' = F(x) + xF'(x)$ 이므로, $G'(x) = (xF(x))' + 2x$ 이다.

$H(x) = G(x) - xF(x)$ 라 하면 $H'(x) = G'(x) - (xF(x))' = 2x$ 이다. 양변을 x 에 대하여 적분하면 $H(x) = G(x) - xF(x) = x^2 + C$ (C 는 적분상수)를 얻는다. 문제의 조건 $G(1) - F(1) = 4$ 를 이용하기 위해 $x = 1$ 을 대입하면 $G(1) - 1 \cdot F(1) = 1^2 + C$ 에서 $4 = 1 + C$ 이므로 $C = 3$ 이다.

따라서 $G(x) - xF(x) = x^2 + 3$ 이고, 구하는 값은 $x = 3$ 을 대입한 $G(3) - 3F(3) = 3^2 + 3 = 12$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계와 사인법칙, 코사인법칙을 종합적으로 활용하여 삼각형의 두 변의 길이의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

$\cos A = -\frac{1}{4}$ 이고 $0 < A < \pi$ 이므로, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $3\sqrt{15}$ 이므로, 넓이 공식 $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = 3\sqrt{15}$ 에서 $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$ 이다. 따라서 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24$ 이다.

외접원의 반지름의 길이가 $R = 4$ 이므로 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$ 이다. $\overline{BC} = 2R \sin A = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{15}$ 이다. 코사인법칙에 의해 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2(\overline{AB})(\overline{AC})\cos A$ 이므로, $(2\sqrt{15})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2(24)\left(-\frac{1}{4}\right)$ 이다. $60 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 12$, 즉 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 48$ 이다.

곱셈 공식에 의해 $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2(\overline{AB})(\overline{AC})$ 이므로, $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = 48 + 2(24) = 96$ 이다. 따라서 두 변의 길이의 합은 $\overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 두 점의 속도가 주어질 때, 정적분을 이용하여 두 점이 만나는 시각과 특정 구간에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 P, Q는 원점에서 동시에 출발하였으므로, 시각 $t > 0$ 에서 두 점이 다시 만나려면 두 점의 위치가 같아야 한다. 즉, 시각 t 까지의 위치 변화량이 같아야 하므로

$$\int_0^t v_P(u) du = \int_0^t v_Q(u) du$$

이다.

이는

$$\int_0^t \{v_P(u) - v_Q(u)\} du = 0$$

과 같다.

$v_P(t) - v_Q(t) = (9t^2 - 14t - 9) - (6t^2 - 6t - 12) = 3t^2 - 8t + 3$ 이다.

$$\int_0^t (3u^2 - 8u + 3) du = [u^3 - 4u^2 + 3u]_0^t = t^3 - 4t^2 + 3t = t(t-1)(t-3) = 0$$

이다.

$t > 0$ 에서 만나는 시각은 $t = 1, t = 3$ 이므로, 두 번째로 만나는 시각 $T = 3$ 이다.

시각 $t = 0$ 부터 $t = 3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_Q(t)| dt$$

이다.

$v_Q(t) = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t^2 - t - 2) = 6(t-2)(t+1)$ 이므로, 구간 $[0, 2]$ 에서 $v_Q(t) \leq 0$ 이고 구간 $[2, 3]$ 에서 $v_Q(t) \geq 0$ 이다.

움직인 거리는

$$\int_0^3 |6(t-2)(t+1)| dt = \int_0^2 -6(t^2 - t - 2) dt + \int_2^3 6(t^2 - t - 2) dt$$

이다.

$$\begin{aligned} &= -6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^2 + 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^3 \\ &= -6\left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) + 6\left\{\left(9 - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right\} \\ &= -6\left(-\frac{10}{3}\right) + 6\left\{\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right)\right\} = 20 + 6\left(\frac{-9+20}{6}\right) = 20 + 11 = 31 \quad \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 점 Q가 움직인 거리는 31이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 로그함수의 그래프의 기하학적 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있다.

[풀이]

원점 O와 점 $P(k, \log_a k)$ 를 잇는 직선 OP의 기울기는 $\frac{\log_a k}{k}$ 이다. 두 점 $P(k, \log_a k)$ 와 $Q(k^2, \log_a k^2)$ 를 잇는 직선 PQ의 기울기는

$\frac{\log_a k^2 - \log_a k}{k^2 - k} = \frac{2\log_a k - \log_a k}{k(k-1)} = \frac{\log_a k}{k(k-1)}$ 이다. 직선 PQ의 기울기가 직선 OP의 기울기의 $\frac{1}{2}$ 배이므로 $\frac{\log_a k}{k(k-1)} = \frac{1}{2} \times \frac{\log_a k}{k}$ 이다. $a > 1, k > 1$ 이므로 $\log_a k > 0$ 이고, 양변을 $\frac{\log_a k}{k}$ 로 나누면 $\frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}$ 이므로 $k = 3$ 이다.

$k = 3$ 일 때, $P(3, \log_a 3)$, $Q(9, \log_a 9)$, $R(3, 0)$, $S(9, 0)$ 이다. 사각형 PQRS 는 윗변의 길이가 $\overline{PR} = \log_a 3$, 아랫변의 길이가 $\overline{QS} = \log_a 9 = 2\log_a 3$, 높이가 $\overline{RS} = 9 - 3 = 6$ 인 사다리꼴이다. 사다리꼴 PQRS 의 넓이는

$\frac{1}{2}(\log_a 3 + 2\log_a 3) \times 6 = 3(3\log_a 3) = 9\log_a 3$ 이다. 이 넓이가 18 이므로 $9\log_a 3 = 18$ 에서 $\log_a 3 = 2$ 이다. 즉 $a^2 = 3$ 이고, $a > 1$ 이므로 $a = \sqrt{3}$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a^k = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구하고, 넓이 사이의 관계식을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 넓이 A 는 다음과 같다.

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

또한, $k > 2$ 일 때 구간 $[2, k]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 넓이 B 는 다음과 같다.

$$B = \int_2^k (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_2^k$$

$$B = \left(\frac{1}{4}k^4 - k^3 + k^2\right) - \left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) = \frac{1}{4}k^4 - k^3 + k^2$$

주어진 조건 $B = 64A$ 에 따라 식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4}k^4 - k^3 + k^2 = 64 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 64$$

$$k^2(k^2 - 4k + 4) = 64$$

$$k^2(k - 2)^2 = 64$$

$$\{k(k - 2)\}^2 = 8^2$$

$$k(k - 2) = 8 \quad \text{또는} \quad k(k - 2) = -8 \quad \text{이다.}$$

$$(i) \quad k^2 - 2k - 8 = 0 \quad \text{에서} \quad (k - 4)(k + 2) = 0 \quad \text{이다.} \quad k > 2 \quad \text{이므로} \quad k = 4 \quad \text{이다.}$$

$$(ii) \quad k^2 - 2k + 8 = 0 \quad \text{은 판별식} \quad D/4 = 1^2 - 8 = -7 < 0 \quad \text{이므로 실근을 갖지 않는다.}$$

따라서 구하는 k 의 값은 4 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수의 그래프와 성질을 이용하여, 함수의 치역에 포함된 정수의 개수에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 구하는 문제입니다.

[풀이]

집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 3이 되는 k 의 범위가 $2 \leq k < 3$ 이다.

$x > -5$ 에서 함수 $h(x) = -2^{x-1} + 8$ 은 감소한다. k 가 2 에서 3 으로 변할 때 $h(k)$ 의 값은 $h(3) = -2^{3-1} + 8 = 4$ 보다 크고

$h(2) = -2^{2-1} + 8 = 6$ 보다 작거나 같다. 즉, $h(k) \in (4, 6]$ 이다.

$h(x) = 5$ 가 되는 x 값은 $-2^{x-1} + 8 = 5$ 에서 $2^{x-1} = 3$, 즉 $x = 1 + \log_2 3$ 이다. $2 < 1 + \log_2 3 < 3$ 이므로, k 가 2 에서 3 으로 증가하는 동안 $h(x)$ 의 정수 값 목록에 5 가 추가된다. k 의 값이 $[2, 1 + \log_2 3)$ 일 때 $-5 < x \leq k$ 범위에서 $f(x)$ 의 정수 값은 $\{6, 7\}$ 이고, k 의 값이 $[1 + \log_2 3, 3)$ 일 때 정수 값은 $\{5, 6, 7\}$ 이다.

주어진 k 의 범위 $[2, 3)$ 에서 전체 정수의 개수가 3으로 일정해야 하므로, 새롭게 추가되는 정수 5 는 $x \leq -5$ 에서의 치역에 이미 포함되어 있어야 한다. 또한, $k \in [2, 1 + \log_2 3)$ 일 때 $|I_L \cup \{6, 7\}| = 3$ 이어야 하므로, $x \leq -5$ 범위에서 정수 값의 집합 I_L 은 $\{5\}$ 가 되어야 한다. $x \leq -5$ 에서 $f(x) = 3^{x+a} + b$ 의 치역은 $(b, 3^{-5+a} + b]$ 이다. 이 범위에 속하는 정수가 5 뿐이어야 하므로, 자연수 b 는 $4 \leq b < 5$ 에서 $b = 4$ 이다.

따라서 $5 \leq 3^{-5+a} + 4 < 6$ 이고, $1 \leq 3^{-5+a} < 2$ 이다. a 가 자연수이므로 $3^{-5+a} = 1$ 이어야 하고 $-5 + a = 0$ 에서 $a = 5$ 이다.

그러므로 $a = 5, b = 4$ 이고 $a + b = 9$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 삼차함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

함수

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt$$

를 미분하면 $g'(x) = |f(x)| - |x|$ 이다. 따라서 방정식 $g'(x) = 0$ 의 근은 $|f(x)| = |x|$, 즉 $f(x) = x$ 또는 $f(x) = -x$ 를 만족시키는 x 의 값이다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 기함수이므로 $f(x) = ax^3 + bx$ ($a > 0$)로 놓을 수 있다. $f(x)$ 가 기함수이고 $y = x$, $y = -x$ 도 모두 기함수이므로, 양의 실근이 1, 2 이면 음의 실근은 -1, -2 이다. 방정식 $f(x) = x$ 와 $f(x) = -x$ 가 각각 하나의 양의 실근을 나누어 가져야 한다.

(i) $f(1) = 1$ 이고 $f(2) = -2$ 인 경우:

$$f(1) = a + b = 1$$

$$f(2) = 8a + 2b = -2$$

$$\text{에서 } 4a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $3a = -2$ 이므로 $a = -\frac{2}{3}$ 이다. 이는 최고차항의 계수가 양수라는 조건에 위배된다.

(ii) $f(1) = -1$ 이고 $f(2) = 2$ 인 경우:

$$f(1) = a + b = -1$$

$$f(2) = 8a + 2b = 2 \quad \text{에서 } 4a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $3a = 2$ 이므로 $a = \frac{2}{3}$ 이다. $a = \frac{2}{3} > 0$ 이므로 조건을 만족시킨다. 이때 $b = -1 - a = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$ 이다.

구하는 값은 $f(3)$ 이므로 $f(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - \frac{5}{3}(3) = \frac{2}{3}(27) - 5 = 18 - 5 = 13$ 이다.

따라서 $f(3)$ 의 값은 13 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 지수방정식의 해를 구하고, 이를 이용해 로그의 성질과 진수 조건을 고려하여 로그방정식을 풀 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

지수방정식 $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ 에서 $2^x = t$ ($t > 0$)로 치환하면 $t^2 - 9t + 8 = 0$ 이다. 이 이차방정식은 $(t - 1)(t - 8) = 0$ 으로 인수분해되므로 $t = 1$ 또는 $t = 8$ 이다. $2^x = 1$ 에서 $x = 0$, $2^x = 8$ 에서 $x = 3$ 을 얻는다. 문제에서 양수인 해는 a 이므로 $a = 3$ 이다.

$a = 3$ 을 로그방정식에 대입하면 $\log_3(x - 2) + \log_3 x = 1$ 이다. 로그의 진수 조건에 따라 $x - 2 > 0$ 이고 $x > 0$ 이므로 $x > 2$ 이다.

주어진 로그방정식은 로그의 성질에 의해 $\log_3(x(x - 2)) = 1$ 로 정리할 수 있다.

로그의 정의에 따라 $x(x - 2) = 3^1$ 이므로 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 을 얻는다. 이를 인수분해하면 $(x - 3)(x + 1) = 0$ 이므로 $x = 3$ 또는 $x = -1$ 이다. 진수 조건 $x > 2$ 를 만족시키는 해는 $x = 3$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: 18

[출제의도] 시그마의 선형적 성질을 이용하여 두 수열의 합에 대한 연립방정식을 세우고 그 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = A$$

,

$$\sum_{k=1}^{12} b_k = B$$

라 하면, 시그마의 성질에 의해 주어진 두 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A + 2B = 50 \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

$$2A - B = 20 \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

구하고자 하는 값은 A 이다. $\textcircled{2}$ 의 양변에 2를 곱하면 $4A - 2B = 40$ 이다.

이 식과 $\textcircled{1}$ 을 변끼리 더하면 $(A + 2B) + (4A - 2B) = 50 + 40$ 이므로 $5A = 90$ 이다.

따라서

$$A = \sum_{k=1}^{12} a_k = 18$$

이다.

18. 정답 및 풀이

정답: 12

[출제의도] 등차수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 조건 $a_2 + a_6 = 12$ 에서 $(a + d) + (a + 5d) = 12$ 이므로 $a + 3d = 6$ 이다. 첫째항부터 제5항까지의 합 $S_5 = 40$ 에서 $\frac{5(2a + 4d)}{2} = 40$ 이므로 $a + 2d = 8$ 이다. 위 두 식을 연립하면 $a = 12, d = -2$ 이다. 따라서 $a_1 = 12$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: 31

[출제의도] 도함수를 활용하여 삼차함수의 극값에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 구하고 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$ 이다.

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2a$ 이다. a 가 양의 상수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값을, $x = 2a$ 에서 극솟값을 갖는다.

극댓값은 $f(0) = b$ 이고, 극솟값은 $f(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 + b = 8a^3 - 12a^3 + b = -4a^3 + b$ 이다.

극댓값과 극솟값의 차가 32 이므로 $f(0) - f(2a) = b - (-4a^3 + b) = 4a^3 = 32$ 에서 $a^3 = 8$ 이므로 $a = 2$ 이다.

이때 극솟값은 $f(2a) = f(4) = 4$ 이므로, $f(4) = -4(2^3) + b = -32 + b = 4$ 에서 $b = 36$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 36$ 이므로, 구하는 값은 $f(1) = 1 - 6 + 36 = 31$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 복합적으로 활용하여, 주어진 조건을 만족하는 사각형의 넓이를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC에서 $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{3}$ 이므로 $\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin(\angle ABC) = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$ 이다.

코사인법칙에 의해 대각선 AC의 길이를 구하면, $\overline{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{3} = 9 + 25 - 10 = 24$ 이다.

두 삼각형 ABC와 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R$ 이고 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)} = 2R$ 이다. 따라서 $\sin(\angle ABC) = \sin(\angle ADC)$ 이고, 사각형의 내각이므로 $\angle ADC = \pi - \angle ABC$ 이다. 그러므로

$\cos(\angle ADC) = -\cos(\angle ABC) = -\frac{1}{3}$ 이다.

삼각형 ADC에서 $\overline{AD} = x$ 라 하면 $\overline{CD} = 6 - x$ 이다. 코사인법칙을 적용하면, $\overline{AC}^2 = x^2 + (6 - x)^2 - 2x(6 - x)(-\frac{1}{3})$ 이다.

$$24 = x^2 + 36 - 12x + x^2 + \frac{2}{3}(6x - x^2)$$

$$72 = 6x^2 - 36x + 108 + 12x - 2x^2$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 0, x^2 - 6x + 9 = 0, (x - 3)^2 = 0 \text{ 이므로 } x = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 $\overline{AD} = 3, \overline{CD} = 3$ 이고, 삼각형 ADC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin(\angle ADC) = \frac{9}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$ 이다.

사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형의 넓이의 합이므로 $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ 이다.

[4점]

21. 정답 및 풀이

정답: 69

[출제의도] 미분계수의 정의와 유사한 형태의 식을 포함한 항등 부등식 조건을 해석하여 삼차함수를 결정하고 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면, 최고차항의 계수가 1이므로 주어진 조건과 같다. $f(0) = 5$ 이므로 $c = 5$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고 $f'(0) = b$ 이다.

주어진 부등식의 각 항을 x 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

가운데 항: $\frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} = \frac{(x/2)^3 + a(x/2)^2 + b(x/2)}{x/2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{2}x + b$

왼쪽 항: $\frac{f'(x)}{12} = \frac{3x^2 + 2ax + b}{12} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{6}x + \frac{b}{12}$

오른쪽 항: $\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{b}{2}$

첫 번째 부등식 $\frac{f'(x)}{12} \leq \frac{f(x/2) - f(0)}{x/2}$ 에서

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{2}x + b\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{6}x + \frac{b}{12}\right) \geq 0$$

$$\frac{a}{3}x + \frac{11b}{12} \geq 0 \text{ 이다.}$$

이 부등식이 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 x 의 계수는 0이어야 한다. 따라서 $\frac{a}{3} = 0$ 에서 $a = 0$ 이고, $\frac{11b}{12} \geq 0$ 에서 $b \geq 0$ 이다.

두 번째 부등식 $\frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} \leq \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{f'(0)}{2}$ 에서 $a = 0$ 을 대입하면

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{b}{2}\right) - \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{b}{2}\right) \geq 0$$

$$(1)/(16)x^4 - (3b)/(2) \geq 0 \Rightarrow x^4 \geq 24b \text{ 이다.}$$

이 부등식은 0이 아닌 모든 실수 x 에 대해 성립해야 한다. $x \neq 0$ 일 때 $x^4 > 0$ 이고 $x \rightarrow 0$ 일 때 $x^4 \rightarrow 0$ 이므로, $0 \geq 24b$ 가 성립해야 한다. 따라서 $b \leq 0$ 이다.

두 조건에서 $b \geq 0$ 이고 $b \leq 0$ 이므로 $b = 0$ 이다.

따라서 $a = 0, b = 0$ 이고 $f(x) = x^3 + 5$ 이다.

구하는 값은 $f(4) = 4^3 + 5 = 64 + 5 = 69$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 두 가지 규칙으로 귀납적으로 정의된 수열의 조건을 분석하여 가능한 양수 k 의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 식에서 각 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + k \text{ 또는 } a_{n+1} = -a_n \text{ 이다.}$$

$$a_1 = 1 \text{ 이고 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 6 \text{ 이므로}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 5 \text{ 이다.}$$

먼저 $a_2 = 1 + k$ 인 경우를 살펴보자.

$$(1) (a_2, a_3, a_4) = (1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k) \text{ 이면}$$

$$4 + 6k = 5 \text{ 이므로 } k = 1/6 \text{ 이다.}$$

이때 $a_4 = 2$ 이고 $a_5 = -2 < 1$ 이므로 가능하다.

$$(2) (a_2, a_3, a_4) = (1 + k, 1 + 2k, -1 - 2k) \text{ 이면}$$

$$2 + k = 5 \text{ 이므로 } k = 3 \text{ 이다.}$$

이때 $a_4 = -9$ 이고 $a_5 = -5 < 1$ 이므로 가능하다.

$$(3) (a_2, a_3, a_4) = (1 + k, -1 - k, 1 + k) \text{ 이면}$$

$$2 + k = 5$$

이므로 $k = 4$ 이다.

이때 $a_4 = 5$ 이고 $a_5 = -5 < 1$ 이므로 가능하다.

다음으로 $a_2 = -1$ 인 경우를 살펴보자.

(1) $(a_2, a_3, a_4) = (-1, -1 + k, -1 + 2k)$ 이면
 $-2 + 3k = 6$ 이므로 $k = 8/3$ 이다.

이때 $a_4 = 13/3$ 이고 $a_5 = -13/3 < 1$ 이므로 가능하다.

(2) $(a_2, a_3, a_4) = (-1, 1, 1 + k)$ 이면
 $2 + k = 6$ 이므로 $k = 4$ 이다.

이때 $a_4 = 5$ 이고 $a_5 = -5 < 1$ 이므로 가능하다.

나머지 경우는 첫 네 항의 합이 6이 되지 않는다.

따라서 가능한 양수 k 는 $1/3$, 4 , $8/3$ 이고, 그 합은
 $1/3 + 4 + 8/3 = 7$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 기댓값을 구하고, 기댓값의 성질을 이용하여 새로운 확률변수의 기댓값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

확률변수 X 는 이항분포 $B(40, \frac{1}{2})$ 를 따르므로, X 의 기댓값은 $E(X) = 40 \times \frac{1}{2} = 20$ 이다.

확률변수 $Y = \frac{1}{2}X + 5$ 의 기댓값은 기댓값의 성질 $E(aX + b) = aE(X) + b$ 에 의해 $E(Y) = E(\frac{1}{2}X + 5) = \frac{1}{2}E(X) + 5$ 이다.

따라서 $E(Y) = \frac{1}{2} \times 20 + 5 = 10 + 5 = 15$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 사건이 서로 배반일 조건의 의미를 집합의 포함 관계로 해석하여 확률의 덧셈정리를 적용할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 사건 A 와 B^C 이 서로 배반사건이므로 $A \cap B^C = \emptyset$ 이다. 이는 $A - B = \emptyset$ 이므로 $A \subset B$ 임을 의미한다.

$A \subset B$ 이므로 $A \cup B = B$ 이고, 따라서 $P(A \cup B) = P(B)$ 이다. 또한, 사건 B 는 서로 배반인 두 사건 A 와 $B - A$ 의 합사건, 즉 $B = A \cup (B - A)$ 로 나타낼 수 있다. $P(B - A) = P(B \cap A^C)$ 이므로 확률의 덧셈정리에 의해

$P(B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(A^C \cap B)$ 이다.

주어진 값을 대입하면 $P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 여러 수의 곱이 특정 성질을 만족할 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

1부터 12까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$ 이다.

선택된 세 수의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면, A 의 여사건 A^C 는 세 수의 곱이 홀수인 사건이다. 세 수의 곱이 홀수이려면 세 수 모두 홀수여야 한다. 1부터 12까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6개이다.

여사건 A^C 가 일어나는 경우의 수는 6개의 홀수 중에서 3개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 이다. 따라서 여사건의 확률은 $P(A^C) = \frac{20}{220} = \frac{1}{11}$ 이다.

구하는 확률은 $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 특정 확률값을 만족하는 변수의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이] 쿠키 한 개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(150, 8^2)$ 을 따른다. 주어진 조건은 $P(X \geq k) = 0.1357$ 이다. 확률변수 X 를 표준화하면 $Z = \frac{X-150}{8}$ 이고, $P(X \geq k) = P(Z \geq \frac{k-150}{8}) = 0.1357$ 이다. $P(Z \geq 0) = 0.5$ 이므로,

$P(0 \leq Z \leq \frac{k-150}{8}) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq \frac{k-150}{8}) = 0.5 - 0.1357 = 0.3643$ 이다. 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.1) = 0.3643$ 이므로, $\frac{k-150}{8} = 1.1$ 이다. 따라서 $k - 150 = 8 \times 1.1 = 8.8$ 이므로 $k = 158.8$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 주어진 확률 실험에서 정의된 이산확률변수의 확률분포를 구하고 그 분산을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$ 이다. 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 두 수의 합이므로 2, 3, 4, 5, 6이다. 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \quad (1, 1\text{을 뽑는 경우})$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_1C_1}{{}_5C_2} = \frac{2}{10} \quad (1, 2\text{를 뽑는 경우})$$

$$P(X=4) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{4}{10} \quad (1, 3\text{을 뽑는 경우})$$

$$P(X=5) = \frac{{}_1C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{2}{10} \quad (2, 3\text{을 뽑는 경우})$$

$$P(X=6) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \quad (3, 3\text{을 뽑는 경우})$$

확률변수 X 의 기댓값 $E(X)$ 는 $E(X) = 2(\frac{1}{10}) + 3(\frac{2}{10}) + 4(\frac{4}{10}) + 5(\frac{2}{10}) + 6(\frac{1}{10}) = \frac{2+6+16+10+6}{10} = \frac{40}{10} = 4$ 이다. X^2 의 기댓값 $E(X^2)$ 는 $E(X^2) = 4(\frac{1}{10}) + 9(\frac{2}{10}) + 16(\frac{4}{10}) + 25(\frac{2}{10}) + 36(\frac{1}{10}) = \frac{4+18+64+50+36}{10} = \frac{172}{10} = \frac{86}{5}$ 이다.

따라서 X 의 분산 $V(X)$ 는 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{86}{5} - 4^2 = \frac{86}{5} - 16 = \frac{86-80}{5} = \frac{6}{5}$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 함수의 개수를 구하여 조건부확률을 계산한다.

[풀이]

주어진 조건을 만족하는 사건을 A라 하자.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 합이 6인 두 수의 조합으로부터

$f(1) + f(5) = 6$, $f(2) + f(4) = 6$, $2f(3) = 6$ 을 얻는다.

따라서 $f(3) = 3$ 이다.

순서쌍 $(f(1), f(5))$ 는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$ 의 5가지이다.

순서쌍 $(f(2), f(4))$ 도 같은 방법으로 5가지이다.

그러므로 사건 A를 만족하는 함수는

$5 \times 5 = 25$ 개이다.

이 중 $f(1)$ 이 홀수인 경우에는

$(f(1), f(5)) = (1, 5), (3, 3), (5, 1)$ 의 3가지가 가능하다.

$(f(2), f(4))$ 를 정하는 방법은 5가지이므로 해당 함수는

$3 \times 5 = 15$ 개이다.

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = 15/25 = 3/5$$

이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 100

[출제의도] 한 번의 시행에서 특정 사건이 일어날 확률을 구하고, 독립시행의 확률을 이용하여 특정 조건을 만족하는 확률을 계산할 수 있다.

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때 3의 배수(3, 6)인 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이고, 3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이다. 6번의 시행 중 3의 배수가 나오는 횟수를 r 이라 하면, 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $6 - r$ 이다. 이때 점 P의 좌표 k 는 $k = 1 \times r + (-1) \times (6 - r) = 2r - 6$ 이다.

조건 $k^2 = 4$ 에서 $k = 2$ 또는 $k = -2$ 이다.

$k = 2$ 일 때, $2r - 6 = 2$ 이므로 $r = 4$ 이다.

$k = -2$ 일 때, $2r - 6 = -2$ 이므로 $r = 2$ 이다.

따라서 구하는 확률 p 는 6번의 시행에서 3의 배수가 2번 또는 4번 나올 확률의 합과 같다.

$$\begin{aligned} p &= {}_6C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 15 \times \frac{1}{9} \times \frac{16}{81} + 15 \times \frac{1}{81} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{240}{729} + \frac{60}{729} = \frac{300}{729} = \frac{100}{243} \end{aligned}$$

따라서 $243 \times p = 243 \times \frac{100}{243} = 100$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 531

[출제의도] 게임의 규칙에 따라 두 학생의 승리 확률을 구하고, 확률 사이의 관계를 이용하여 미지수를 결정한다.

[풀이]

갑은 1 또는 3을 뽑을 때 카드를 내려놓으므로, 갑이 카드를 내려놓을 확률과 내려놓지 않을 확률은 각각 $1/2$ 이다.

1부터 6까지의 수 중 m 의 홀수인 약수의 개수를 k_o , 짝수인 약수의 개수를 k_e 라 하자. 또 $k = k_o + k_e$ 라 하자.

을이 카드를 내려놓을 확률은 $k/6$, 내려놓지 않을 확률은 $(6 - k)/6$ 이다.

갑이 이기는 경우는 갑만 카드를 내려놓거나, 두 사람 모두 카드를 내려놓지 않는 경우이다. 두 경우의 확률을 더하면

$$\begin{aligned} p &= (1/2)((6 - k)/6) + (1/2)((6 - k)/6) \\ &= (6 - k)/6 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

을이 이기는 경우는 을만 카드를 내려놓거나, 두 사람이 모두 카드를 내려놓고 을이 짝수인 약수를 뽑는 경우이다. 따라서

$$\begin{aligned} q &= (1/2)(k/6) + (1/2)(k_e/6) \\ &= (k + k_e)/12 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$p = 2q$ 이므로

$$(6 - k)/6 = 2(k + k_e)/12 \text{ 이고,}$$

$$6 - k = k + k_e \text{ 이다.}$$

$$\text{즉 } 6 = 2k + k_e \text{ 이다.}$$

$k = k_o + k_e$ 를 대입하면

$$6 = 2k_o + 3k_e \text{ 이다.}$$

k_o, k_e 는 음이 아닌 정수이고 k_o 는 1 이상이므로 가능한 순서쌍은

$$(k_o, k_e) = (3, 0) \text{ 뿐이다.}$$

따라서 1부터 6까지 중 m 의 약수는 홀수인 1, 3, 5이고 짝수인 약수는 없다. $10 \leq m \leq 20$ 이므로 $m = 15$ 이다.

이때 $k = 3$, $k_e = 0$ 이므로
 $q = (3 + 0)/12 = 1/4$ 이다.

따라서
 $36(m - q) = 36(15 - 1/4) = 531$ 이다.
