

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	④	②	③	④	①	②	③	③	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	④	③	③	②	3	18	12	31	③
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
69	7	③	③	③	③	③	⑤	12	86

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 거듭제곱근을 유리수 지수로 변환하고 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

$a = \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ 이고 $b = \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}$ 이다.

따라서 $\frac{a}{b} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{6}}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 5^{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$ 이다.

구하는 값은 $(\frac{a}{b})^2 = (5^{\frac{1}{2}})^2 = 5^1 = 5$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 미분계수의 정의를 변형된 형태로 이해하고, 이를 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 x^2 의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다. 이때 $f'(x) = 2x + a$ 이다.

조건 (나)의 극한 식을 미분계수의 정의를 이용하여 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}f'(2)$$

따라서 $-\frac{1}{3}f'(2) = -1$ 이므로 $f'(2) = 3$ 이다. $f'(2) = 2(2) + a = 4 + a$ 이므로 $4 + a = 3$ 에서 $a = -1$ 을 얻는다.

구하고자 하는 값은 $f'(4)$ 이고 $f'(x) = 2x - 1$ 이므로, $f'(4) = 2(4) - 1 = 7$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 시그마의 선형적 성질을 이용하여 두 수열의 합에 대한 연립방정식을 해결할 수 있다.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = A$$

,

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = B$$

라 하면, 시그마의 성질에 따라 주어진 조건은 $A + B = 30$ 과 $2A - B = 15$ 이다. 두 식을 연립하여 풀면 $A = 15$, $B = 15$ 를 얻는다. 따라서 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k) = A - 2B = 15 - 2(15) = -15$$

이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 구간에 따라 다르게 정의된 함수의 함수값과 우극한을 계산하고, 주어진 등식을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 먼저 함수값 $f(-2)$ 와 우극한 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ 를 각각 구한다.

$x = -2$ 는 $-2 \leq -1$ 이므로 $f(-2) = 2(-2) + k = -4 + k$ 이다.

$x \rightarrow -1+$ 는 x 가 -1 보다 큰 값을 가지면서 -1 에 한없이 가까워지는 경우이므로 $f(x) = x^2 - 5$ 를 이용한다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - 5) = (-1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4 \text{ 이다.}$$

주어진 조건 $f(-2) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -6$ 에 구한 값을 대입하면 $(-4 + k) + (-4) = -6$ 이므로 $k - 8 = -6$ 에서 $k = 2$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

등비수열 a_n 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 모든 항이 양수이므로 $a > 0$, $r > 0$ 이다.

조건 $\frac{S_4}{S_2} = 5$ 에서 $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ 이므로 $\frac{a(r^4 - 1)/(r - 1)}{a(r^2 - 1)/(r - 1)} = \frac{r^4 - 1}{r^2 - 1} = r^2 + 1$ 이다. 따라서 $r^2 + 1 = 5$ 에서 $r^2 = 4$ 이고, $r > 0$ 이므로 $r = 2$ 이다.

조건 $a_2 a_4 = 144$ 에서 $(ar)(ar^3) = a^2 r^4 = 144$ 이다. $r = 2$ 를 대입하면 $a^2 \times 2^4 = 16a^2 = 144$ 이므로 $a^2 = 9$ 이고, $a > 0$ 이므로 $a = 3$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a_6 = ar^5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 삼각함수의 각 변환 공식과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 특정 삼각함수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 조건 $\tan(\pi - \theta) = -\frac{3}{4}$ 에서, 각 변환 공식에 따라 $-\tan \theta = -\frac{3}{4}$ 이므로 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이다. 다른 조건

$\sin \theta + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) < 0$ 에서, 각 변환 공식에 따라 $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ 이므로, 부등식은 $2\sin \theta < 0$ 즉 $\sin \theta < 0$ 이 된다.

$\tan \theta > 0$ 이고 $\sin \theta < 0$ 이므로 각 θ 는 제3사분면의 각이다. 삼각함수 사이의 관계식 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 를 이용하면,

$$\sec^2 \theta = 1 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{25}{16} \text{ 이다. 따라서 } \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \text{ 이다.}$$

θ 가 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$ 이다. 그러므로 구하는 값은 $\cos \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ 이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 함수의 정의역이 미지수를 경계로 나뉘는 경우, 함수의 연속성 조건을 이용하여 모든 미지수의 값의 곱을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x = k$ 에서 연속이어야 한다. 함수의 연속 조건에 따라 $x = k$ 에서의 좌극한과 함수값이 같아야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow k-} f(x) = f(k)$ 가 성립해야 한다. 좌극한은 $\lim_{x \rightarrow k-} x^2 = k^2$ 이고, 함수값은 $f(k) = 3k + 10$ 이다.

따라서 $k^2 = 3k + 10$ 이라는 방정식을 얻을 수 있다. 이 식을 정리하면 $k^2 - 3k - 10 = 0$ 이고, $(k - 5)(k + 2) = 0$ 으로 인수분해된다. 이를 만족하는 k 의 값은 $k = 5$ 또는 $k = -2$ 이다. 따라서 모든 상수 k 의 값의 곱은 $5 \times (-2) = -10$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분으로 정의된 상수를 포함하는 도함수로부터 부정적분을 이용하여 원래 함수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건에서

$$\int_{-1}^1 f(t) dt$$

는 상수이므로 이 값을 C 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + C$ 이다.

$f(x)$ 는 $f'(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$f(x) = \int (3x^2 + C) dx = x^3 + Cx + D$$

(D 는 적분상수)로 놓을 수 있다.

조건 $f(0) = 1$ 에서 $f(0) = 0^3 + C \cdot 0 + D = D = 1$ 이므로 $f(x) = x^3 + Cx + 1$ 이다.

$$C = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

의 정의에 $f(x)$ 를 대입하면

$$C = \int_{-1}^1 (t^3 + Ct + 1) dt$$

이다.

t^3 과 Ct 는 기함수이므로

$$\int_{-1}^1 (t^3 + Ct) dt = 0$$

이다. 따라서

$$C = \int_{-1}^1 1 dt = [t]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$$

이다.

완성된 함수식은 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ 이다.

따라서 $f(2) = 2^3 + 2(2) + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 부정적분과 도함수의 관계 및 곱의 미분법을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

[풀이]

$F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분이므로 $F'(x) = f(x)$ 이고, $G(x)$ 가 $F(x) + xf(x) + 2x$ 의 한 부정적분이므로

$G'(x) = F(x) + xf(x) + 2x$ 이다. 한편 곱의 미분법에 의해 $(xF(x))' = F(x) + xF'(x)$ 이므로, $G'(x) = (xF(x))' + 2x$ 이다.

$H(x) = G(x) - xF(x)$ 라 하면 $H'(x) = G'(x) - (xF(x))' = 2x$ 이다. 양변을 x 에 대하여 적분하면 $H(x) = G(x) - xF(x) = x^2 + C$ (C 는 적분상수)를 얻는다. 문제의 조건 $G(1) - F(1) = 4$ 를 이용하기 위해 $x = 1$ 을 대입하면 $G(1) - 1 \cdot F(1) = 1^2 + C$ 에서 $4 = 1 + C$ 이므로 $C = 3$ 이다.

따라서 $G(x) - xF(x) = x^2 + 3$ 이고, 구하는 값은 $x = 3$ 을 대입한 $G(3) - 3F(3) = 3^2 + 3 = 12$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계와 사인법칙, 코사인법칙을 종합적으로 활용하여 삼각형의 두 변의 길이의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

$\cos A = -\frac{1}{4}$ 이고 $0 < A < \pi$ 이므로, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $3\sqrt{15}$ 이므로, 넓이 공식 $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = 3\sqrt{15}$ 에서 $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$ 이다. 따라서 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24$ 이다.

외접원의 반지름의 길이가 $R = 4$ 이므로 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R$ 이다. $\overline{BC} = 2R \sin A = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{15}$ 이다. 코사인법칙에 의해 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2(\overline{AB})(\overline{AC})\cos A$ 이므로, $(2\sqrt{15})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2(24)\left(-\frac{1}{4}\right)$ 이다. $60 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 12$, 즉 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 48$ 이다.

곱셈 공식에 의해 $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2(\overline{AB})(\overline{AC})$ 이므로, $(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = 48 + 2(24) = 96$ 이다. 따라서 두 변의 길이의 합은 $\overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 수직선 위를 움직이는 두 점의 속도가 주어질 때, 정적분을 이용하여 두 점이 만나는 시각과 특정 구간에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 P, Q는 원점에서 동시에 출발하였으므로, 시각 $t > 0$ 에서 두 점이 다시 만나려면 두 점의 위치가 같아야 한다. 즉, 시각 t 까지의 위치 변화량이 같아야 하므로

$$\int_0^t v_P(u) du = \int_0^t v_Q(u) du$$

이다.

이는

$$\int_0^t \{v_P(u) - v_Q(u)\} du = 0$$

과 같다.

$v_P(t) - v_Q(t) = (9t^2 - 14t - 9) - (6t^2 - 6t - 12) = 3t^2 - 8t + 3$ 이다.

$$\int_0^t (3u^2 - 8u + 3) du = [u^3 - 4u^2 + 3u]_0^t = t^3 - 4t^2 + 3t = t(t-1)(t-3) = 0$$

이다.

$t > 0$ 에서 만나는 시각은 $t = 1, t = 3$ 이므로, 두 번째로 만나는 시각 $T = 3$ 이다.

시각 $t = 0$ 부터 $t = 3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_Q(t)| dt$$

이다.

$v_Q(t) = 6t^2 - 6t - 12 = 6(t^2 - t - 2) = 6(t-2)(t+1)$ 이므로, 구간 $[0, 2]$ 에서 $v_Q(t) \leq 0$ 이고 구간 $[2, 3]$ 에서 $v_Q(t) \geq 0$ 이다.

움직인 거리는

$$\int_0^3 |6(t-2)(t+1)| dt = \int_0^2 -6(t^2 - t - 2) dt + \int_2^3 6(t^2 - t - 2) dt$$

이다.

$$\begin{aligned} &= -6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^2 + 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^3 \\ &= -6\left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) + 6\left\{\left(9 - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right\} \\ &= -6\left(-\frac{10}{3}\right) + 6\left\{\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right)\right\} = 20 + 6\left(\frac{-9+20}{6}\right) = 20 + 11 = 31 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

따라서 점 Q가 움직인 거리는 31이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 로그함수의 그래프의 기하학적 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있다.

[풀이]

원점 O와 점 $P(k, \log_a k)$ 를 잇는 직선 OP의 기울기는 $\frac{\log_a k}{k}$ 이다. 두 점 $P(k, \log_a k)$ 와 $Q(k^2, \log_a k^2)$ 를 잇는 직선 PQ의 기울기는 $\frac{\log_a k^2 - \log_a k}{k^2 - k} = \frac{2\log_a k - \log_a k}{k(k-1)} = \frac{\log_a k}{k(k-1)}$ 이다. 직선 PQ의 기울기가 직선 OP의 기울기의 $\frac{1}{2}$ 배이므로 $\frac{\log_a k}{k(k-1)} = \frac{1}{2} \times \frac{\log_a k}{k}$ 이다. $a > 1, k > 1$ 이므로 $\log_a k > 0$ 이고, 양변을 $\frac{\log_a k}{k}$ 로 나누면 $\frac{1}{k-1} = \frac{1}{2}$ 이므로 $k = 3$ 이다.

$k = 3$ 일 때, $P(3, \log_a 3)$, $Q(9, \log_a 9)$, $R(3, 0)$, $S(9, 0)$ 이다. 사각형 PQRS 는 윗변의 길이가 $\overline{PR} = \log_a 3$, 아랫변의 길이가 $\overline{QS} = \log_a 9 = 2\log_a 3$, 높이가 $\overline{RS} = 9 - 3 = 6$ 인 사다리꼴이다. 사다리꼴 PQRS 의 넓이는

$\frac{1}{2}(\log_a 3 + 2\log_a 3) \times 6 = 3(3\log_a 3) = 9\log_a 3$ 이다. 이 넓이가 18 이므로 $9\log_a 3 = 18$ 에서 $\log_a 3 = 2$ 이다. 즉 $a^2 = 3$ 이고, $a > 1$ 이므로 $a = \sqrt{3}$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a^k = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구하고, 넓이 사이의 관계식을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ 는 구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 넓이 A 는 다음과 같다.

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}$$

또한, $k > 2$ 일 때 구간 $[2, k]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 넓이 B 는 다음과 같다.

$$B = \int_2^k (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_2^k$$

$$B = \left(\frac{1}{4}k^4 - k^3 + k^2\right) - \left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) = \frac{1}{4}k^4 - k^3 + k^2$$

주어진 조건 $B = 64A$ 에 따라 식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4}k^4 - k^3 + k^2 = 64 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = 64$$

$$k^2(k^2 - 4k + 4) = 64$$

$$k^2(k - 2)^2 = 64$$

$$\{k(k - 2)\}^2 = 8^2$$

$$k(k - 2) = 8 \quad \text{또는} \quad k(k - 2) = -8 \quad \text{이다.}$$

$$(i) \quad k^2 - 2k - 8 = 0 \quad \text{에서} \quad (k - 4)(k + 2) = 0 \quad \text{이다.} \quad k > 2 \quad \text{이므로} \quad k = 4 \quad \text{이다.}$$

$$(ii) \quad k^2 - 2k + 8 = 0 \quad \text{은 판별식} \quad D/4 = 1^2 - 8 = -7 < 0 \quad \text{이므로 실근을 갖지 않는다.}$$

따라서 구하는 k 의 값은 4 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수의 그래프와 성질을 이용하여, 함수의 치역에 포함된 정수의 개수에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 구하는 문제입니다.

[풀이]

집합 $\{f(x) | x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 3이 되는 k 의 범위가 $2 \leq k < 3$ 이다.

$x > -5$ 에서 함수 $h(x) = -2^{x-1} + 8$ 은 감소한다. k 가 2 에서 3 으로 변할 때 $h(k)$ 의 값은 $h(3) = -2^{3-1} + 8 = 4$ 보다 크고

$h(2) = -2^{2-1} + 8 = 6$ 보다 작거나 같다. 즉, $h(k) \in (4, 6]$ 이다.

$h(x) = 5$ 가 되는 x 값은 $-2^{x-1} + 8 = 5$ 에서 $2^{x-1} = 3$, 즉 $x = 1 + \log_2 3$ 이다. $2 < 1 + \log_2 3 < 3$ 이므로, k 가 2 에서 3 으로 증가하는 동안 $h(x)$ 의 정수 값 목록에 5 가 추가된다. k 의 값이 $[2, 1 + \log_2 3)$ 일 때 $-5 < x \leq k$ 범위에서 $f(x)$ 의 정수 값은 $\{6, 7\}$ 이고, k 의 값이 $[1 + \log_2 3, 3)$ 일 때 정수 값은 $\{5, 6, 7\}$ 이다.

주어진 k 의 범위 $[2, 3)$ 에서 전체 정수의 개수가 3으로 일정해야 하므로, 새롭게 추가되는 정수 5 는 $x \leq -5$ 에서의 치역에 이미 포함되어 있어야 한다. 또한, $k \in [2, 1 + \log_2 3)$ 일 때 $|I_L \cup \{6, 7\}| = 3$ 이어야 하므로, $x \leq -5$ 범위에서 정수 값의 집합 I_L 은 $\{5\}$ 가 되어야 한다. $x \leq -5$ 에서 $f(x) = 3^{x+a} + b$ 의 치역은 $(b, 3^{-5+a} + b]$ 이다. 이 범위에 속하는 정수가 5 뿐이어야 하므로, 자연수 b 는 $4 \leq b < 5$ 에서 $b = 4$ 이다.

따라서 $5 \leq 3^{-5+a} + 4 < 6$ 이고, $1 \leq 3^{-5+a} < 2$ 이다. a 가 자연수이므로 $3^{-5+a} = 1$ 이어야 하고 $-5 + a = 0$ 에서 $a = 5$ 이다.

그러므로 $a = 5, b = 4$ 이고 $a + b = 9$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 삼차함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

함수

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt$$

를 미분하면 $g'(x) = |f(x)| - |x|$ 이다. 따라서 방정식 $g'(x) = 0$ 의 근은 $|f(x)| = |x|$, 즉 $f(x) = x$ 또는 $f(x) = -x$ 를 만족시키는 x 의 값이다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 기함수이므로 $f(x) = ax^3 + bx$ ($a > 0$)로 놓을 수 있다. $f(x)$ 가 기함수이고 $y = x$, $y = -x$ 도 모두 기함수이므로, 양의 실근이 1, 2 이면 음의 실근은 -1, -2 이다. 방정식 $f(x) = x$ 와 $f(x) = -x$ 가 각각 하나의 양의 실근을 나누어 가져야 한다.

(i) $f(1) = 1$ 이고 $f(2) = -2$ 인 경우:

$$f(1) = a + b = 1$$

$$f(2) = 8a + 2b = -2$$

$$\text{에서 } 4a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $3a = -2$ 이므로 $a = -\frac{2}{3}$ 이다. 이는 최고차항의 계수가 양수라는 조건에 위배된다.

(ii) $f(1) = -1$ 이고 $f(2) = 2$ 인 경우:

$$f(1) = a + b = -1$$

$$f(2) = 8a + 2b = 2 \quad \text{에서 } 4a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $3a = 2$ 이므로 $a = \frac{2}{3}$ 이다. $a = \frac{2}{3} > 0$ 이므로 조건을 만족시킨다. 이때 $b = -1 - a = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x$ 이다.

구하는 값은 $f(3)$ 이므로 $f(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - \frac{5}{3}(3) = \frac{2}{3}(27) - 5 = 18 - 5 = 13$ 이다.

따라서 $f(3)$ 의 값은 13 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 지수방정식의 해를 구하고, 이를 이용해 로그의 성질과 진수 조건을 고려하여 로그방정식을 풀 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

지수방정식 $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ 에서 $2^x = t$ ($t > 0$)로 치환하면 $t^2 - 9t + 8 = 0$ 이다. 이 이차방정식은 $(t - 1)(t - 8) = 0$ 으로 인수분해되므로 $t = 1$ 또는 $t = 8$ 이다. $2^x = 1$ 에서 $x = 0$, $2^x = 8$ 에서 $x = 3$ 을 얻는다. 문제에서 양수인 해는 a 이므로 $a = 3$ 이다.

$a = 3$ 을 로그방정식에 대입하면 $\log_3(x - 2) + \log_3 x = 1$ 이다. 로그의 진수 조건에 따라 $x - 2 > 0$ 이고 $x > 0$ 이므로 $x > 2$ 이다.

주어진 로그방정식은 로그의 성질에 의해 $\log_3(x(x - 2)) = 1$ 로 정리할 수 있다.

로그의 정의에 따라 $x(x - 2) = 3^1$ 이므로 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 을 얻는다. 이를 인수분해하면 $(x - 3)(x + 1) = 0$ 이므로 $x = 3$ 또는 $x = -1$ 이다. 진수 조건 $x > 2$ 를 만족시키는 해는 $x = 3$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: 18

[출제의도] 시그마의 선형적 성질을 이용하여 두 수열의 합에 대한 연립방정식을 세우고 그 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = A$$

,

$$\sum_{k=1}^{12} b_k = B$$

라 하면, 시그마의 성질에 의해 주어진 두 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A + 2B = 50 \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

$$2A - B = 20 \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

구하고자 하는 값은 A 이다. $\textcircled{2}$ 의 양변에 2를 곱하면 $4A - 2B = 40$ 이다.

이 식과 $\textcircled{1}$ 을 변끼리 더하면 $(A + 2B) + (4A - 2B) = 50 + 40$ 이므로 $5A = 90$ 이다.

따라서

$$A = \sum_{k=1}^{12} a_k = 18$$

이다.

18. 정답 및 풀이

정답: 12

[출제의도] 등차수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 조건 $a_2 + a_6 = 12$ 에서 $(a + d) + (a + 5d) = 12$ 이므로 $a + 3d = 6$ 이다. 첫째항부터 제5항까지의 합 $S_5 = 40$ 에서 $\frac{5(2a + 4d)}{2} = 40$ 이므로 $a + 2d = 8$ 이다. 위 두 식을 연립하면 $a = 12, d = -2$ 이다. 따라서 $a_1 = 12$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: 31

[출제의도] 도함수를 활용하여 삼차함수의 극값에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 구하고 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$ 이다.

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2a$ 이다. a 가 양의 상수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값을, $x = 2a$ 에서 극솟값을 갖는다.

극댓값은 $f(0) = b$ 이고, 극솟값은 $f(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 + b = 8a^3 - 12a^3 + b = -4a^3 + b$ 이다.

극댓값과 극솟값의 차가 32 이므로 $f(0) - f(2a) = b - (-4a^3 + b) = 4a^3 = 32$ 에서 $a^3 = 8$ 이므로 $a = 2$ 이다.

이때 극솟값은 $f(2a) = f(4) = 4$ 이므로, $f(4) = -4(2^3) + b = -32 + b = 4$ 에서 $b = 36$ 이다.

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 36$ 이므로, 구하는 값은 $f(1) = 1 - 6 + 36 = 31$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 복합적으로 활용하여, 주어진 조건을 만족하는 사각형의 넓이를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC에서 $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{3}$ 이므로 $\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin(\angle ABC) = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$ 이다.

코사인법칙에 의해 대각선 AC의 길이를 구하면, $\overline{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{3} = 9 + 25 - 10 = 24$ 이다.

두 삼각형 ABC와 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R$ 이고 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)} = 2R$ 이다. 따라서 $\sin(\angle ABC) = \sin(\angle ADC)$ 이고, 사각형의 내각이므로 $\angle ADC = \pi - \angle ABC$ 이다. 그러므로

$\cos(\angle ADC) = -\cos(\angle ABC) = -\frac{1}{3}$ 이다.

삼각형 ADC에서 $\overline{AD} = x$ 라 하면 $\overline{CD} = 6 - x$ 이다. 코사인법칙을 적용하면, $\overline{AC}^2 = x^2 + (6 - x)^2 - 2x(6 - x)(-\frac{1}{3})$ 이다.

$24 = x^2 + 36 - 12x + x^2 + \frac{2}{3}(6x - x^2)$

$72 = 6x^2 - 36x + 108 + 12x - 2x^2$

$4x^2 - 24x + 36 = 0$, $x^2 - 6x + 9 = 0$, $(x - 3)^2 = 0$ 이므로 $x = 3$ 이다.

따라서 $\overline{AD} = 3, \overline{CD} = 3$ 이고, 삼각형 ADC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin(\angle ADC) = \frac{9}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$ 이다.

사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형의 넓이의 합이므로 $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ 이다.

[4점]

21. 정답 및 풀이

정답: 69

[출제의도] 미분계수의 정의와 유사한 형태의 식을 포함한 항등 부등식 조건을 해석하여 삼차함수를 결정하고 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면, 최고차항의 계수가 1이므로 주어진 조건과 같다. $f(0) = 5$ 이므로 $c = 5$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고 $f'(0) = b$ 이다.

주어진 부등식의 각 항을 x 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

가운데 항: $\frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} = \frac{(x/2)^3 + a(x/2)^2 + b(x/2)}{x/2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{2}x + b$

왼쪽 항: $\frac{f'(x)}{12} = \frac{3x^2 + 2ax + b}{12} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{6}x + \frac{b}{12}$

오른쪽 항: $\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{b}{2}$

첫 번째 부등식 $\frac{f'(x)}{12} \leq \frac{f(x/2) - f(0)}{x/2}$ 에서

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{2}x + b\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{6}x + \frac{b}{12}\right) \geq 0$$

$$\frac{a}{3}x + \frac{11b}{12} \geq 0 \text{ 이다.}$$

이 부등식이 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 x 의 계수는 0이어야 한다. 따라서 $\frac{a}{3} = 0$ 에서 $a = 0$ 이고, $\frac{11b}{12} \geq 0$ 에서 $b \geq 0$ 이다.

두 번째 부등식 $\frac{f(x/2) - f(0)}{x/2} \leq \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{f'(0)}{2}$ 에서 $a = 0$ 을 대입하면

$$\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{b}{2}\right) - \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{b}{2}\right) \geq 0$$

$$(1)/(16)x^4 - (3b)/(2) \geq 0 \Rightarrow x^4 \geq 24b \text{ 이다.}$$

이 부등식은 0이 아닌 모든 실수 x 에 대해 성립해야 한다. $x \neq 0$ 일 때 $x^4 > 0$ 이고 $x \rightarrow 0$ 일 때 $x^4 \rightarrow 0$ 이므로, $0 \geq 24b$ 가 성립해야 한다. 따라서 $b \leq 0$ 이다.

두 조건에서 $b \geq 0$ 이고 $b \leq 0$ 이므로 $b = 0$ 이다.

따라서 $a = 0, b = 0$ 이고 $f(x) = x^3 + 5$ 이다.

구하는 값은 $f(4) = 4^3 + 5 = 64 + 5 = 69$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 두 가지 규칙으로 귀납적으로 정의된 수열의 조건을 분석하여 가능한 양수 k 의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 식에서 각 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + k \text{ 또는 } a_{n+1} = -a_n \text{ 이다.}$$

$$a_1 = 1 \text{ 이고 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 6 \text{ 이므로}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 5 \text{ 이다.}$$

먼저 $a_2 = 1 + k$ 인 경우를 살펴보자.

$$(1) (a_2, a_3, a_4) = (1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k) \text{ 이면}$$

$$4 + 6k = 6 \text{ 이므로 } k = 1/3 \text{ 이다.}$$

이때 $a_4 = 2$ 이고 $a_5 = -2 < 1$ 이므로 가능하다.

$$(2) (a_2, a_3, a_4) = (1 + k, 1 + 2k, -1 - 2k) \text{ 이면}$$

$$2 + k = 6 \text{ 이므로 } k = 4 \text{ 이다.}$$

이때 $a_4 = -9$ 이고 $a_5 = -5 < 1$ 이므로 가능하다.

$$(3) (a_2, a_3, a_4) = (1 + k, -1 - k, 1 + k) \text{ 이면}$$

$$2 + k = 6$$

이므로 $k = 4$ 이다.

이때 $a_4 = 5$ 이고 $a_5 = -5 < 1$ 이므로 가능하다.

다음으로 $a_2 = -1$ 인 경우를 살펴보자.

(1) $(a_2, a_3, a_4) = (-1, -1 + k, -1 + 2k)$ 이면
 $-2 + 3k = 6$ 이므로 $k = 8/3$ 이다.

이때 $a_4 = 13/3$ 이고 $a_5 = -13/3 < 1$ 이므로 가능하다.

(2) $(a_2, a_3, a_4) = (-1, 1, 1 + k)$ 이면
 $2 + k = 6$ 이므로 $k = 4$ 이다.

이때 $a_4 = 5$ 이고 $a_5 = -5 < 1$ 이므로 가능하다.

나머지 경우는 첫 네 항의 합이 6이 되지 않는다.

따라서 가능한 양수 k 는 $1/3$, 4 , $8/3$ 이고, 그 합은
 $1/3 + 4 + 8/3 = 7$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수의 극한을 치환과 인수분해를 이용하여 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이] $t = 2^x$ 로 치환하면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이다. 주어진 극한 식은

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - t}$$

와 같다. 분자와 분모를 인수분해하면

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t(t-1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t+1}{t}$$

이다. 따라서 구하는 극한값은 $\frac{1^2+1+1}{1} = 3$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그함수와 삼각함수가 합성된 함수의 정적분을 치환적분법을 이용하여 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

핵심 조건은 피적분함수가 $\cos(\ln x)$ 와 $\frac{1}{x}$ 의 곱으로 이루어져 있다는 점이다. $\ln x = t$ 로 치환하면 $\frac{1}{x}dx = dt$ 이다. 적분 구간을 변환하면, $x = 1$ 일 때 $t = \ln 1 = 0$ 이고, $x = e^{\frac{\pi}{2}}$ 일 때 $t = \ln e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

주어진 정적분은 치환에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$$

로 바꿀 수 있다.

따라서 정적분의 값은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 합의 특징과 수열의 극한의 성질을 이용하여 등차수열의 특정 항의 값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} = \frac{d}{2}n^2 + (a - \frac{d}{2})n$ 입니다.

주어진 극한 식

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - S_n}{2n + 1} = -1$$

에서 분자를 정리하면 $3n^2 - S_n = (3 - \frac{d}{2})n^2 - (a - \frac{d}{2})n$ 입니다.

극한값이 -1 로 수렴하므로 분모와 분자의 최고차항의 차수가 같아야 합니다. 분모의 최고차항은 n 이므로 분자의 n^2 항의 계수는 0이어야 합니다. 따라서 $3 - \frac{d}{2} = 0$ 에서 $d = 6$ 입니다.

$d = 6$ 일 때, 극한 식은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(a-3)n}{2n+1} = -\frac{a-3}{2}$$

이 됩니다.

이 극한값이 -1 이므로 $-\frac{a-3}{2} = -1$ 에서 $a-3=2$, 즉 $a=5$ 입니다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 5 + (n-1) \times 6 = 6n - 1$ 입니다.

그러므로 구하는 값은 $a_3 = 6 \times 3 - 1 = 17$ 입니다.

26. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 일반항을 이해하고, 부분분수를 이용한 무한급수와 무한등비급수의 합을 활용하여 주어진 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하자. 문제의 조건에서 $d=2$, $r=\frac{1}{3}$ 이다. $a_1=b_1=k$ 라 하면, 모든 항이 양수이므로 $k>0$ 이다. 무한등비급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

은 수렴하고 그 합은 $\frac{b_1}{1-r} = \frac{k}{1-1/3} = \frac{3k}{2}$ 이다. 또한, 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a_n a_{n+1}}$$

에서 $a_{n+1} - a_n = d = 2$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{N+1}} \right) = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{k}$$

이다.

주어진 식

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{2}{a_n a_{n+1}} \right) = \frac{1}{2}$$

는 $\frac{3k}{2} - \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ 와 같다. 양변에 $2k$ 를 곱하여 정리하면 $3k^2 - 2 = k$, 즉 $3k^2 - k - 2 = 0$ 이다. 이 이차방정식을 풀면 $(3k+2)(k-1) = 0$ 이고, $k>0$ 이므로 $k=1$ 이다. 따라서 $a_1=1$, $b_1=1$ 이다.

구하는 값은 $a_1 + b_3$ 이다. $a_1 = 1$ 이고 $b_3 = b_1 r^2 = 1 \cdot (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ 이므로, $a_1 + b_3 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

[풀이]

$h(x) = f(\tan x)$ 라 하면, 함수 $g(x)$ 는 $h(x)$ 의 역함수이다. $f(1) = 3$ 이므로 $h(\frac{\pi}{4}) = f(\tan \frac{\pi}{4}) = f(1) = 3$ 이다. 따라서 역함수의 정의에 의해 $g(3) = \frac{\pi}{4}$ 이다.

한편, $h'(x) = f'(\tan x) \cdot \sec^2 x$ 이므로 역함수의 미분법에 의해 $g'(3) = \frac{1}{h'(g(3))} = \frac{1}{h'(\frac{\pi}{4})}$ 이다.

$h'(\frac{\pi}{4}) = f'(\tan \frac{\pi}{4}) \sec^2 \frac{\pi}{4} = f'(1) \cdot (\sqrt{2})^2 = 2f'(1)$ 이므로, $g'(3) = \frac{1}{2f'(1)}$ 이다.

주어진 조건 $f'(1) = 4g'(3) + 1$ 에 $g'(3) = \frac{1}{2f'(1)}$ 을 대입하면, $f'(1) = 4(\frac{1}{2f'(1)}) + 1 = \frac{2}{f'(1)} + 1$ 이다. $f'(1) = A$ 라 하면

$A = \frac{2}{A} + 1$ 이므로 $A^2 - A - 2 = 0$, 즉 $(A - 2)(A + 1) = 0$ 이다. $f'(x) > 0$ 이므로 $f'(1) = 2$ 이다. 따라서 $g'(3) = \frac{1}{2f'(1)} = \frac{1}{4}$ 이므로, 구하는 값은 $g(3) + g'(3) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi+1}{4}$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 역함수의 적분법과 부분적분법, 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

$g(x) = f'(2x)\cos(\pi x) + x^2$ 이고 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로 $g(0) = f'(0)\cos(0) + 0^2 = 0$, $g(1) = f'(2)\cos(\pi) + 1^2 = -f'(2) + 1 = 1$ 이다. 따라서 $g^{-1}(0) = 0$ 이고 $g^{-1}(1) = 1$ 이다.

역함수의 정적분 성질에 따라

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 1 \cdot g^{-1}(1) - 0 \cdot g^{-1}(0) = 1$$

이므로

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 g(x)dx$$

이다.

주어진 등식에 이를 대입하면

$$1 - \int_0^1 (f'(2x)\cos(\pi x) + x^2)dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{\pi}$$

이다.

$$\int_0^1 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

이므로,

$$1 - \int_0^1 f'(2x)\cos(\pi x)dx - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{\pi}$$

에서

$$\int_0^1 f'(2x)\cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}$$

이다.

한편, 구하고자 하는 정적분

$$\int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

에서 부분적분법을 사용하면

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= [f(x) \left(-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)]_0^2 - \int_0^2 f'(x) \left(-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} (f(2) \cos(\pi) - f(0) \cos(0)) + \frac{2}{\pi} \int_0^2 f'(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} (-f(2) - f(0)) + \frac{2}{\pi} \int_0^2 f'(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi} (f(2) + f(0)) + \frac{2}{\pi} \int_0^2 f'(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \end{aligned}$$

이다.

조건에서 $f(0) + f(2) = 0$ 이므로, 구하는 값은

$$\frac{2}{\pi} \int_0^2 f'(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

이다.

$$\int_0^1 f'(2x) \cos(\pi x) dx$$

에서 $t = 2x$ 로 치환하면 $dt = 2dx$ 이고, 적분구간은 $[0, 2]$ 가 된다.

$$\int_0^1 f'(2x) \cos(\pi x) dx = \int_0^2 f'(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f'(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \frac{1}{\pi}$$

이므로,

$$\int_0^2 f'(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi}$$

이다.

따라서 구하는 값은 $\frac{2}{\pi} \times \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 12

[출제의도] 지수식을 포함한 수열의 극한값을 밑의 크기에 따라 나누어 계산하고, 이를 활용하여 주어진 방정식을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^n + 4^{n+1}}{x^{n+1} + 4^n}$$

에서 x 의 값의 범위를 나누어 극한값을 구한다.

(i) $1 < x < 4$ 일 때, 분모와 분자를 4^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x/4)^n + 4}{x(x/4)^n + 1} = 4$$

이다.

(ii) $x = 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^n}{4 \cdot 4^n + 4^n} = \frac{6}{5}$$

이다.

(iii) $x > 4$ 일 때, 분모와 분자를 x^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4(4/x)^n}{x + (4/x)^n} = \frac{2}{x}$$

이다.

주어진 조건 $f(a) = \frac{1}{3}$ 을 만족시키려면 $\frac{2}{a} = \frac{1}{3}$ 이어야 하므로 $a = 6$ 이고, 이는 $a > 4$ 라는 조건을 만족시킨다.

$a = 6$ 을 두 번째 등식에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + b^{n+2}}{6^n + b^{n+1}} = 12 - b$$

이다. b 의 값의 범위를 나누어 극한값을 구한다.

(i) $1 < b < 6$ 일 때, 좌변의 극한값은 6 이므로 $6 = 12 - b$ 에서 $b = 6$ 이다. 이는 $b < 6$ 이라는 가정에 모순이다.

(ii) $b = 6$ 일 때, 좌변의 극한값은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 6^{n+2}}{6^n + 6^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 36}{1 + 6} = 6$$

이다. $6 = 12 - b$ 에서 $b = 6$ 이므로 가정을 만족시킨다.

(iii) $b > 6$ 일 때, 좌변의 극한값은 b 이므로 $b = 12 - b$ 에서 $b = 6$ 이다. 이는 $b > 6$ 이라는 가정에 모순이다.

위의 경우를 모두 종합하면 $a = 6, b = 6$ 이 유일한 해이다.

따라서 구하는 값은 $a + b = 6 + 6 = 12$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 86

[출제의도] 주어진 함수 관계식을 곱의 미분법 형태로 파악하고, 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이] 주어진 등식의 양변에 $\{f(x)\}^2$ 를 곱하면 $g(x) = \{f(x)\}^3 + 3x\{f(x)\}^2 f'(x)$ 이다.

곱의 미분법에 의하여 이는 $g(x) = (x\{f(x)\}^3)'$ 와 같다.

첫 번째 조건

$$\int_1^2 g(x) dx = 58$$

에 위 식을 대입하면

$$\int_1^2 (x\{f(x)\}^3)' dx = [x\{f(x)\}^3]_1^2 = 2\{f(2)\}^3 - 1 \cdot \{f(1)\}^3 = 58$$

이다.

$f(1) = 2$ 이므로 $2\{f(2)\}^3 - 8 = 58$, 즉 $\{f(2)\}^3 = 33$ 이다.

두 번째 조건

$$\int_1^2 xg(x) dx = 38$$

에 부분적분법을 적용하면

$$\int_1^2 x(x\{f(x)\}^3)' dx = [x^2\{f(x)\}^3]_1^2 - \int_1^2 x\{f(x)\}^3 dx = 38$$

이다.

$$2^2\{f(2)\}^3 - 1^2\{f(1)\}^3 - \int_1^2 x\{f(x)\}^3 dx = 38$$

에서

$$(4 \cdot 33 - 1 \cdot 8) - \int_1^2 x\{f(x)\}^3 dx = 38$$

이므로

$$124 - \int_1^2 x\{f(x)\}^3 dx = 38$$

이다.

따라서

$$\int_1^2 x\{f(x)\}^3 dx = 124 - 38 = 86$$

이다.
