

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
②	④	④	④	③	④	③	③	③	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
⑤	③	③	②	③	4	5	45	27	③
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	2	③	③	③	③	④	②	29	⑤

1. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 지수와 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 식의 밑을 3으로 변환하면 $9^{\log_3 \sqrt{2}} = (3^2)^{\log_3 \sqrt{2}} = 3^{2\log_3 \sqrt{2}}$ 이다.

로그의 성질 $m\log_a b = \log_a b^m$ 을 이용하여 지수를 정리하면 $2\log_3 \sqrt{2} = \log_3 (\sqrt{2})^2 = \log_3 2$ 이다.

따라서 주어진 식의 값은 $3^{\log_3 2} = 2$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 다항함수에 포함된 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

미분계수의 정의에 따라 주어진 극한값은 $f'(-1)$ 과 같다. 즉, $f'(-1) = 7$ 이다.

함수 $f(x) = x^3 + ax - 1$ 의 도함수는 $f'(x) = 3x^2 + a$ 이다.

따라서 $f'(-1) = 3(-1)^2 + a = 3 + a$ 이므로, $3 + a = 7$ 에서 $a = 4$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 등비수열의 일반항과 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 특정 항의 값을 구하는 문제입니다.

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$ 입니다. 조건 $a_3 = a_2^2$ 에서

$ar^2 = (ar)^2 = a^2r^2$ 입니다. $a > 0, r > 0$ 이므로 양변을 ar^2 으로 나누면 $a = 1$ 을 얻습니다. 다른 조건 $a_1a_5 = 64$ 에서

$a \cdot (ar^4) = a^2r^4 = 64$ 입니다. $a = 1$ 을 이 식에 대입하면 $1^2 \cdot r^4 = 64$, 즉 $r^4 = 64$ 입니다. 따라서 구하는 값 a_5 는 $a_5 = ar^4 = 1 \cdot 64 = 64$ 입니다.

4. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 함수의 특정 지점에서의 함숫값과 우극한을 각각 구하여 그 합을 계산할 수 있다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 $x = 1$ 일 때의 함숫값은 $f(1) = 2$ 이다.

$x \rightarrow 1+$ 일 때 x 는 1 보다 큰 값을 가지면서 1 에 가까워지므로, 이때의 극한값은 $f(x) = x^2 + 1$ 을 따른다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2 \text{ 이다.}$$

구하는 값은 $f(1) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 + 2 = 4$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 함숫값과 미분계수를 구하고, 곱의 미분법을 이용하여 미분계수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 극한식

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 2}{x + 1} = 4$$

에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + 2) = 0$ 이므로 $f(-1) = -2$ 이다. 미분계수의 정의에 의해

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 2}{x + 1} = 4$$

이다.

함수 $g(x) = (x^2 + 3)f(x)$ 를 곱의 미분법을 이용하여 미분하면 $g'(x) = (2x)f(x) + (x^2 + 3)f'(x)$ 이다.

위 식에 $x = -1$ 을 대입하면 $g'(-1) = 2(-1)f(-1) + ((-1)^2 + 3)f'(-1) = -2f(-1) + 4f'(-1)$ 이다. 여기에 $f(-1) = -2$ 와 $f'(-1) = 4$ 를 대입하면 $g'(-1) = -2(-2) + 4(4) = 4 + 16 = 20$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 미정계수를 구하는 문제입니다.

[풀이] 이차방정식 $3x^2 + ax + 1 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 따라 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{3}$ 이고

$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$ 입니다. 삼각함수의 항등식 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta$ 를 이용하면, $(-\frac{a}{3})^2 = 1 + 2(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ 입니다. 따라서

$\frac{a^2}{9} = \frac{5}{3}$ 에서 $a^2 = 15$ 이므로 $a = \pm\sqrt{15}$ 입니다. 조건에서 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이고, 이에 따라 두 근의 합

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{3}$ 는 음수여야 합니다. 즉, $-\frac{a}{3} < 0$ 에서 $a > 0$ 이므로, 구하는 상수 a 의 값은 $\sqrt{15}$ 입니다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 두 조건을 연립하고, 이를 통해 미지수를 포함한 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 두 조건의 로그 식을 밑을 3으로 통일하여 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$a - b = \log_3 16 = \log_3 2^4 = 4\log_3 2$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \log_9 \frac{1}{4} = \log_{3^2} 2^{-2} = \frac{-2}{2}\log_3 2 = -\log_3 2$$

두 번째 조건의 좌변을 통분하여 정리하면 $\frac{b-a}{ab} = -\frac{a-b}{ab}$ 이므로, 주어진 조건은 $-\frac{a-b}{ab} = -\log_3 2$ 가 된다.
 위 식의 양변에 -1 을 곱하면 $\frac{a-b}{ab} = \log_3 2$ 이다.

이 식에 첫 번째 조건인 $a-b=4\log_3 2$ 를 대입하면 $\frac{4\log_3 2}{ab} = \log_3 2$ 이다.
 $\log_3 2 \neq 0$ 이므로 양변을 $\log_3 2$ 로 나누면 $\frac{4}{ab} = 1$ 을 얻는다.
 따라서 $ab=4$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질과 밑 변환 공식을 이용하여 주어진 두 식을 연립하고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 활용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

첫 번째 조건 $\log_5(ab)=3$ 에서 로그의 성질에 따라 $\log_5 a + \log_5 b = 3$ 이다.
 두 번째 조건 $\log_a 5 + \log_b 5 = \frac{3}{2}$ 에서 밑 변환 공식에 따라 $\frac{1}{\log_5 a} + \frac{1}{\log_5 b} = \frac{3}{2}$ 이다.
 $\log_5 a = X, \log_5 b = Y$ 로 치환하면, $X + Y = 3$ 이고 $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{X+Y}{XY} = \frac{3}{2}$ 이다.
 $X + Y = 3$ 이므로 $\frac{3}{XY} = \frac{3}{2}$ 에서 $XY = 2$ 이다.
 X, Y 는 합이 3 이고 곱이 2 인 이차방정식 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이다.
 $(t-1)(t-2) = 0$ 이므로 두 근은 1 과 2 이다.
 따라서 $\{\log_5 a, \log_5 b\} = \{1, 2\}$ 이고, $\{a, b\} = \{5^1, 5^2\} = \{5, 25\}$ 이다.
 구하는 값은 $a^2 + b^2 = 5^2 + 25^2 = 25 + 625 = 650$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분의 성질과 우함수·기함수의 정적분을 이용하여 다항함수의 정적분 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 식을 정적분의 선형 성질을 이용하여 하나의 적분으로 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{-2}^2 \{ (2f(x) - x^3) - (f(x) - 2x^2) \} dx = \int_{-2}^2 (f(x) - x^3 + 2x^2) dx$$

$f(x) = x^2 + 4x$ 를 대입하여 피적분함수를 정리하고, 적분 구간이 대칭적이므로 우함수와 기함수로 분리한다.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 ((x^2 + 4x) - x^3 + 2x^2) dx &= \int_{-2}^2 (-x^3 + 3x^2 + 4x) dx \\ &= \int_{-2}^2 (-x^3 + 4x) dx + \int_{-2}^2 3x^2 dx \end{aligned}$$

$-x^3 + 4x$ 는 기함수이므로

$$\int_{-2}^2 (-x^3 + 4x) dx = 0$$

이고, $3x^2$ 는 우함수이므로

$$\int_{-2}^2 3x^2 dx = 2 \int_0^2 3x^2 dx$$

이다.

따라서 주어진 식의 값은

$$2 \int_0^2 3x^2 dx = 2[x^3]_0^2 = 2(2^3 - 0^3) = 16$$

이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차함수의 접선의 방정식을 구하고 두 접선의 교점 조건을 해석하여 함수의 식을 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수를 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자. 조건 $f'(0) = -5$ 에서 $b = -5$ 이다.

$x = 0$ 에서의 접선의 y 절편은 $f(0) = c$ 이다. $x = 3$ 에서의 접선 $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$ 의 y 절편은 $f(3) - 3f'(3)$ 이다. 두 접선이 y 축 위에서 만나므로 y 절편이 같아야 한다. 따라서 $f(0) = f(3) - 3f'(3)$ 이다.

주어진 조건 $f(3) = 2$ 와 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 5$ 에서 $f'(3) = 3(3^2) + 2a(3) - 5 = 22 + 6a$ 를 위 관계식에 대입하면 $c = 2 - 3(22 + 6a) = -64 - 18a$ 이다.

한편, $f(3) = 3^3 + a(3^2) - 5(3) + c = 12 + 9a + c = 2$ 이므로 $c = -9a - 10$ 이다.

두 식 $-9a - 10 = -64 - 18a$ 를 연립하여 풀면 $9a = -54$, 즉 $a = -6$ 이다. 이를 대입하면 $c = -9(-6) - 10 = 44$ 이다.

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 5x + 44$ 이므로, 구하는 값은 $f(1) = 1 - 6 - 5 + 44 = 34$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 가속도와 속도, 속도와 위치의 관계를 정적분을 이용하여 파악하고, 두 점의 운동 상태를 비교 분석할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

점 P의 시각 t 에서의 속도 $v_P(t)$ 는 $v_P(0) = 5$ 이고 가속도가 $a(t) = 6t - 8$ 이므로,

$$v_P(t) = 5 + \int_0^t (6\tau - 8)d\tau = 5 + [3\tau^2 - 8\tau]_0^t = 3t^2 - 8t + 5$$

이다.

점 P의 위치 $x_P(t)$ 는 원점에서 출발하므로 $x_P(0) = 0$ 이고,

$$x_P(t) = \int_0^t (3\tau^2 - 8\tau + 5)d\tau = [\tau^3 - 4\tau^2 + 5\tau]_0^t = t^3 - 4t^2 + 5t$$

이다.

점 Q의 위치 $x_Q(t)$ 는 점 10 에서 출발하므로 $x_Q(0) = 10$ 이고, 속도가 $v_Q(t) = 1$ 이므로,

$$x_Q(t) = 10 + \int_0^t 1d\tau = 10 + t$$

이다.

ㄱ. 점 P의 운동 방향은 $v_P(t) = 0$ 인 지점에서 바뀐다. $v_P(t) = 3t^2 - 8t + 5 = (t - 1)(3t - 5) = 0$ 에서 $t = 1$ 또는 $t = 5/3$ 이다. $t > 0$ 에서 $v_P(t)$ 의 부호가 두 번 바뀌므로 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 것은 $v_P(t) = v_Q(t)$ 일 때이다. $3t^2 - 8t + 5 = 1$ 에서 $3t^2 - 8t + 4 = 0$, 즉 $(t - 2)(3t - 2) = 0$ 이다. 따라서 $t = 2/3$ 과 $t = 2$ 일 때 두 번 속도가 같아진다. (참)

ㄷ. 시각 $t = 2$ 에서 점 P의 위치는 $x_P(2) = 2^3 - 4(2^2) + 5(2) = 8 - 16 + 10 = 2$ 이다. 같은 시각 점 Q의 위치는 $x_Q(2) = 10 + 2 = 12$ 이다. 따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|x_P(2) - x_Q(2)| = |2 - 12| = 10$ 이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 항으로 정의된 새로운 수열의 규칙성을 추론하고 등차수열의 일반항을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 수열 $\{b_n\}$ 의 정의에 따라 짝수 항과 홀수 항을 나누어 살펴보면,
 $n = 2m$ (m 은 자연수)일 때,

$$b_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}) = \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} - a_{2k}) = \sum_{k=1}^m (-d) = -md$$

이다.

$n = 2m - 1$ (m 은 자연수)일 때, $b_{2m-1} = b_{2m-2} + a_{2m-1} = -(m-1)d + (a + (2m-2)d) = a + (m-1)d$ 이다.

주어진 조건에 따라 b_2, b_4, b_6 의 합을 구하면 $b_2 + b_4 + b_6 = -d - 2d - 3d = -6d$ 이다.
 $-6d = -36$ 이므로 $d = 6$ 이다.

b_1, b_5, b_9 는 각각 $m = 1, 3, 5$ 일 때의 홀수 번째 항이므로

$b_1 = a$, $b_5 = a + (3-1)d = a + 2d$, $b_9 = a + (5-1)d = a + 4d$ 이다.

세 항의 합은 $b_1 + b_5 + b_9 = a + (a + 2d) + (a + 4d) = 3a + 6d$ 이다.

$3a + 6d = 30$ 이므로 $a + 2d = 10$ 이다. $d = 6$ 을 대입하면 $a + 12 = 10$ 이므로 $a = -2$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = -2 + (n-1) \times 6 = 6n - 8$ 이다.

구하는 값은 $a_{10} = 6 \times 10 - 8 = 52$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 구간별로 정의된 함수의 증가와 감소 조건을 도함수를 이용하여 해석하고, 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극소이면서 유일한 극값을 가지므로, $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 미분가능하고 $f'(-2) = 0$ 이어야 한다. 또한,
 $x \leq -2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이고 $x \geq -2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

함수 $f(x)$ 의 도함수는

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - b & (x < 0) \\ x^2 + 2(a-1)x - b & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다.

$f'(-2) = 0$ 이므로 $-(-2)^2 - 2a(-2) - b = 0$ 에서 $-4 + 4a - b = 0$, 즉 $b = 4a - 4$ 이다.

1. $x < 0$ 일 때:

$f'(x) = -x^2 - 2ax - (4a-4) = -(x^2 + 2ax + 4a-4) = -(x+2)(x+2a-2)$ 이다.

$x \leq -2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이고, $x \in [-2, 0)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$f'(x)$ 는 위로 볼록한 이차함수이고 한 근이 -2 이므로 다른 근 $2-2a$ 는 0 이상이어야 한다. 즉, $2-2a \geq 0$ 이므로 $a \leq 1$ 이다.

2. $x \geq 0$ 일 때:

$f'(x) = x^2 + 2(a-1)x - (4a-4) = x^2 + 2(a-1)x - 4(a-1)$ 이다. 이 구간에서 항상 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$g(x) = x^2 + 2(a-1)x - 4(a-1)$ 이라 하면, $g(x)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이고 대칭축은 $x = -(a-1) = 1-a$ 이다.

(i) $1-a \leq 0$ (즉, $a \geq 1$) 일 때: $x \geq 0$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(0) = -4(a-1)$ 이다. $g(0) \geq 0$ 이어야 하므로
 $-4(a-1) \geq 0$

, 즉 $a \leq 1$ 이다. 따라서 $a = 1$ 이다.

(ii) $1 - a > 0$ (즉, $a < 1$) 일 때: $x \geq 0$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은

$g(1-a) = (1-a)^2 + 2(a-1)(1-a) - 4(a-1) = -(a-1)^2 - 4(a-1) = -(a-1)(a+3)$ 이다. $-(a-1)(a+3) \geq 0$ 이므로 $(a-1)(a+3) \leq 0$ 이다. 따라서 $-3 \leq a \leq 1$ 이고, $a < 1$ 과 결합하면 $-3 \leq a < 1$ 이다.

(i), (ii)로부터 a 의 범위는 $-3 \leq a \leq 1$ 이다.

$b - a = (4a - 4) - a = 3a - 4$ 이므로, a 에 대한 증가함수이다.

따라서 $b - a$ 의 최댓값 M 은 $a = 1$ 일 때 $M = 3(1) - 4 = -1$ 이고, 최솟값 m 은 $a = -3$ 일 때 $m = 3(-3) - 4 = -13$ 이다.

그러므로 $M - m = -1 - (-13) = 12$ 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 그래프와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구하고, 이를 통해 직선의 기울기를 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

함수 $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 x 좌표는 $2\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right) = 1$, 즉 $\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right) = \frac{1}{2}$ 를 만족시킨다. $x > 0$ 인 해를 작은 순서대로 구하면 $\frac{\pi x}{k} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots$ 이므로, $x = \frac{k}{3}, \frac{5k}{3}, \dots$ 이다. 따라서 점 A, B의 좌표는 각각 $A\left(\frac{k}{3}, 1\right)$, $B\left(\frac{5k}{3}, 1\right)$ 이다.

삼각형 OAB의 밑변을 선분 AB로 생각하면 밑변의 길이는 $\frac{5k}{3} - \frac{k}{3} = \frac{4k}{3}$ 이고 높이는 1 이다. 삼각형 OAB의 넓이가 5 이므로,

$\frac{1}{2} \times \frac{4k}{3} \times 1 = 5$ 에서 $\frac{2k}{3} = 5$ 이고, $k = \frac{15}{2}$ 이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -\sqrt{3}$ 이 만나는 점 C의 x 좌표는 $2\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right) = -\sqrt{3}$, 즉 $\cos\left(\frac{\pi x}{k}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 만족시킨다. x 좌표가 가장 작은 양수인 점을 찾아야 하므로 $\frac{\pi x_C}{k} = \frac{5\pi}{6}$ 이다. 따라서 $x_C = \frac{5k}{6}$ 이다. $k = \frac{15}{2}$ 를 대입하면 $x_C = \frac{5}{6} \times \frac{15}{2} = \frac{25}{4}$ 이다. 점 C의 좌표는 $\left(\frac{25}{4}, -\sqrt{3}\right)$ 이다.

따라서 원점 O와 점 C를 잇는 직선 OC의 기울기는 $\frac{-\sqrt{3}-0}{\frac{25}{4}-0} = -\frac{4\sqrt{3}}{25}$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 미분하고 주어진 함수의 관계식을 이용하여 미지의 다항함수를 구한 후, 정적분의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

(가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f(x) + 2xg(x) = 12x^3 - 18x^2 + 4x$ 이다. 여기에 (나)의 조건 $f(x) = x^2g'(x)$ 를 대입하면

$x^2g'(x) + 2xg(x) = 12x^3 - 18x^2 + 4x$ 이다.

곱의 미분법에 의해 $x^2g'(x) + 2xg(x) = \{x^2g(x)\}'$ 이므로, $\{x^2g(x)\}' = 12x^3 - 18x^2 + 4x$ 이다. 양변을 x 에 대하여 적분하면

$x^2g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + C$ (단, C 는 적분상수)이다. $g(x)$ 는 다항함수이므로 $x^2g(x)$ 는 x^2 으로 나누어떨어져야 하므로 $C = 0$ 이다. 따라서 $g(x) = 3x^2 - 6x + 2$ 이다.

구하는 값은

$$\int_{-1}^2 g(x) dx = \int_{-1}^2 (3x^2 - 6x + 2) dx = [x^3 - 3x^2 + 2x]_{-1}^2$$

이다. 정적분의 계산 결과는 $(2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) - \{(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1)\} = (8 - 12 + 4) - (-1 - 3 - 2) = 0 - (-6) = 6$ 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: 4

[출제의도] 밑이 다른 로그의 성질을 이용하여 로그 방정식을 풀고, 진수 조건을 확인하여 해를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

먼저, 지수방정식 $9^{x-1} = 3^{x+1}$ 에서 밑을 3으로 통일하면 $(3^2)^{x-1} = 3^{x+1}$, 즉 $3^{2x-2} = 3^{x+1}$ 입니다. 지수끼리 비교하면 $2x - 2 = x + 1$

이므로 $x = 3$ 이고, 따라서 $\alpha = 3$ 입니다.

주어진 로그 방정식은 $\log_3(x-1) = \log_9(x+5)$ 가 됩니다. 로그의 진수 조건에 의해 $x-1 > 0$ 이고 $x+5 > 0$ 이어야 하므로, 공통 범위는 $x > 1$ 입니다.

로그의 밑을 9로 통일하면 $\log_9(x-1)^2 = \log_9(x+5)$ 입니다. 진수끼리 비교하면 $(x-1)^2 = x+5$ 이고, 전개하여 정리하면

$x^2 - 2x + 1 = x + 5$, $x^2 - 3x - 4 = 0$ 이 됩니다. 이 이차방정식을 풀면 $(x-4)(x+1) = 0$ 에서 $x = 4$ 또는 $x = -1$ 을 얻습니다. 진수 조건 $x > 1$ 을 만족시키는 해는 $x = 4$ 뿐입니다. 따라서 구하는 실수 x 의 값은 4입니다.

17. 정답 및 풀이

정답: 5

[출제의도] 도함수의 성질을 파악하고 부정적분을 이용하여 함수값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이] $f'(x) = 4x^3 - 2x$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \int (4x^3 - 2x) dx = x^4 - x^2 + C$$

이다. (단, C 는 적분상수)

주어진 조건 $f(1) = 5$ 에 따라 $f(1) = 1 - 1 + C = 5$ 이므로 $C = 5$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = x^4 - x^2 + 5$ 로 결정된다.

따라서 구하는 함수값은 $f(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 + 5 = 1 - 1 + 5 = 5$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: 45

[출제의도] 시그마의 성질을 이용하여 항의 계수와 지표를 조정한 두 합의 차로부터 새로운 수열의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 두 식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{11} (k+1)a_k = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots + 12a_{11} = 150$$

$$\sum_{k=1}^{10} ka_{k+1} = 1a_2 + 2a_3 + \cdots + 10a_{11} = 60$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 그 값은 $150 - 60 = 90$ 이다.

좌변을 계산하면 $2a_1 + (3-1)a_2 + (4-2)a_3 + \cdots + (12-10)a_{11}$ 이다.

이는

$$2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \cdots + 2a_{11} = 2 \sum_{k=1}^{11} a_k$$

와 같다.

따라서

$$2 \sum_{k=1}^{11} a_k = 90$$

이므로, 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = 45$$

이다.

19. 정답 및 풀이

정답: 27

[출제의도] 곡선과 그 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이다. 곡선 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) = 0$ 이므로 접선의 방정식은 $y = 0$ 이다.

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ 와 접선 $y = 0$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ 의 실근이다. 조립제법을 이용하면 $(x + 1)(x - 2)^2 = 0$ 이므로 교점의 x 좌표는 $x = -1, x = 2$ 이다.

따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4)dx = [\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x]_{-1}^2 = (4 - 8 + 8) - (\frac{1}{4} + 1 - 4) = 4 - (-\frac{11}{4}) = \frac{27}{4}$$

이다.

그러므로 문제에서 요구하는 값은 $4S = 4 \times \frac{27}{4} = 27$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원에 내접하는 사각형의 성질과 삼각형의 넓이, 코사인 법칙을 종합적으로 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제 해결 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 조건에서 $\overline{PD} = \overline{PC} + \overline{CD} = 4 + 2 = 6$ 이다. 원과 두 직선의 성질에 따라 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 가 성립한다. $\overline{PB} = x$ 라 하면 $\overline{PA} = x + 5$ 이므로 $x(x + 5) = 4 \cdot 6 = 24$ 이다. $x^2 + 5x - 24 = 0$ 을 풀면 $(x + 8)(x - 3) = 0$ 이고, $x > 0$ 이므로 $\overline{PB} = 3$ 이고 $\overline{PA} = 8$ 이다.

원에 내접하는 사각형의 성질에 의해 $\angle PAD = \angle PCB$ 이고, $\angle P$ 는 공통이므로 삼각형 PDA와 삼각형 PBC는 서로 닮음이다. 닮음비는 $\overline{PA} : \overline{PC} = 8 : 4 = 2 : 1$ 이다. 따라서 넓이의 비는 $2^2 : 1^2 = 4 : 1$ 이다. 삼각형 APD의 넓이가 $9\sqrt{7}$ 이므로, 삼각형 PBC의 넓이는

$$\frac{1}{4} \times 9\sqrt{7} = \frac{9\sqrt{7}}{4} \text{ 이다. } \angle BPC = \theta \text{ 라 하면 삼각형 PBC의 넓이는 } \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin \theta = 6 \sin \theta \text{ 이다. 따라서 } 6 \sin \theta = \frac{9\sqrt{7}}{4} \text{ 에서 } \sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{8} \text{ 이다. } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64} \text{ 이므로 } \cos \theta = \frac{1}{8} \text{ 이다.}$$

삼각형 PBC에서 코사인 법칙을 이용하면, $\overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 - 2(\overline{PB})(\overline{PC})\cos \theta$ 이므로 $\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 9 + 16 - 3 = 22$ 이다. 그러므로 $\overline{BC} = \sqrt{22}$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 평균값 정리와 부등식을 이용하여 삼차함수의 도함수를 결정하고 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이다.

주어진 식의 가운데 항을 $g(k) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2}$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k-1) &= \{(k+1)^3 + a(k+1)^2 + b(k+1) + c\} - \{(k-1)^3 + a(k-1)^2 + b(k-1) + c\} \\ &= (6k^2 + 2) + a(4k) + 2b = 6k^2 + 4ak + 2b + 2 \end{aligned}$$

$$g(k) = 3k^2 + 2ak + b + 1 \text{ 이다.}$$

$$f'(k) = 3k^2 + 2ak + b$$

이므로 $g(k) = f'(k) + 1$ 이다.

주어진 부등식은 $2k + 4 \leq f'(k) + 1 \leq 4k^2 + 2k + 4$ 이고, 정리하면 모든 실수 k 에 대하여 $2k + 3 \leq f'(k) \leq 4k^2 + 2k + 3$ 이다.

두 부등식으로 나누어 판별식을 이용한다.

(i) $f'(k) \geq 2k + 3$

$3k^2 + 2ak + b \geq 2k + 3$, 즉 $3k^2 + 2(a-1)k + b-3 \geq 0$ 이 모든 실수 k 에 대해 성립해야 한다.

판별식을 D_1 이라 하면 $D_1/4 = (a-1)^2 - 3(b-3) \leq 0$ 이다.

(ii) $f'(k) \leq 4k^2 + 2k + 3$

$3k^2 + 2ak + b \leq 4k^2 + 2k + 3$, 즉 $k^2 + 2(1-a)k + 3-b \geq 0$ 이 모든 실수 k 에 대해 성립해야 한다.

판별식을 D_2 라 하면 $D_2/4 = (1-a)^2 - (3-b) = (a-1)^2 + b-3 \leq 0$ 이다.

$(a-1)^2 \geq 0$ 이므로, $D_2/4 \leq 0$ 에서 $b-3 \leq -(a-1)^2 \leq 0$ 이므로 $b \leq 3$ 이다.

또한, $D_1/4 \leq 0$ 에서 $3(b-3) \geq (a-1)^2 \geq 0$ 이므로 $b \geq 3$ 이다.

따라서 $b=3$ 이어야 한다.

$b=3$ 을 두 판별식 조건에 대입하면 $(a-1)^2 \leq 0$ 이므로 $a=1$ 이다.

따라서 $f'(x) = 3x^2 + 2x + 3$ 이다.

구하는 값은 $f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) + 3 = 12 - 4 + 3 = 11$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수와 곱의 미분법을 이용하여 다항함수를 구하고, 정적분의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건 (가)의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $0 = 2f(2) - 2^2 - 4$ 이므로 $f(2) = 4$ 이다. 조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x) = f(x) + xf'(x) - 2x$ 이므로 $xf'(x) = 2x$ 이다. $f(x)$ 가 다항함수이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = 2$ 이다. 따라서

$f(x) = 2x + C$ 이고 $f(2) = 4$ 이므로 $f(x) = 2x$ 이다.

조건 (나)에서 $f'(x) = 2$ 이고 $g(x) = G'(x)$ 이므로, 좌변은 $2G(x) + 2xG'(x) = (2xG(x))'$ 이다. 이는 곱의 미분법에 의해 $(f(x)G(x))'$

와 같다. 즉, $(f(x)G(x))' = 8x^3 - 12x$ 이다. 양변을 x 에 대하여 적분하면 $f(x)G(x) = 2x^4 - 6x^2 + C_1$ (단, C_1 은 적분상수)이다.

$f(x) = 2x$ 를 대입하면 $2xG(x) = 2x^4 - 6x^2 + C_1$ 이고, $G(x)$ 가 다항함수이므로 이 등식은 항등식이다. 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $C_1 = 0$

임을 알 수 있다. 따라서 $2xG(x) = 2x^4 - 6x^2$ 이고, $G(x) = x^3 - 3x$ 이다. $g(x) = G'(x) = 3x^2 - 3$ 이다.

구하는 값은

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (3x^2 - 3)dx = [x^3 - 3x]_0^2 = (2^3 - 3 \cdot 2) - 0 = 8 - 6 = 2$$

이다. 따라서 정답은 2 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 지수함수를 포함한 식의 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = e^x$ 라 하면 $f(1) = e$ 이고, $f'(x) = e^x$ 이므로 $f'(1) = e$ 이다.

주어진 극한 식은 미분계수의 정의를 이용하여 변형할 수 있다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+2h} - e}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} f'(1)$$

따라서 구하는 극한값은 $\frac{2}{3}e$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곱의 미분법을 역으로 활용하고 부정적분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구한다.

[풀이]

$g(x) = xf(x)$ 이고 $g'(x) = (x+1)e^x - \sin x$ 이므로, 함수 $g(x)$ 는 $g'(x)$ 의 부정적분이다.

$$g(x) = \int \{(x+1)e^x - \sin x\} dx = xe^x + \cos x + C$$

(단, C 는 적분상수)이다. $(xe^x)' = (x+1)e^x$ 이므로 위와 같이 계산할 수 있다.

$f(x) = \frac{g(x)}{x} = e^x + \frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x}$ 이다. 주어진 조건 $f(\pi) = e^\pi - \frac{1}{\pi}$ 를 이용하면, $f(\pi) = e^\pi + \frac{\cos \pi}{\pi} + \frac{C}{\pi} = e^\pi - \frac{1}{\pi} + \frac{C}{\pi}$ 이므로 $C=0$ 이다.

따라서 $f(x) = e^x + \frac{\cos x}{x}$ 이므로, 구하는 값은 $f(2\pi) = e^{2\pi} + \frac{\cos(2\pi)}{2\pi} = e^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 치환적분법을 이용하여 삼각함수와 지수함수가 결합된 함수의 정적분 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$t = \cos^2 x$ 로 치환하면 $\frac{dt}{dx} = 2\cos x(-\sin x) = -\sin(2x)$ 이므로 $\sin(2x)dx = -dt$ 이다. 적분 구간은 $x=0$ 일 때 $t = \cos^2 0 = 1$ 이고, $x = \pi/2$ 일 때 $t = \cos^2(\pi/2) = 0$ 이다.

주어진 정적분 식은 치환을 통해 다음과 같이 변형된다.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)f(\cos^2 x)dx = \int_1^0 f(t)(-dt) = \int_0^1 f(t)dt$$

$f(x) = e^{x+1}$ 이므로,

$$\int_0^1 e^{t+1}dt = [e^{t+1}]_0^1 = e^{1+1} - e^{0+1} = e^2 - e$$

이다.

따라서 정적분의 값은 $e^2 - e$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정적분을 활용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

[풀이]

곡선 $y = \sqrt{2x-1}$ 에서 $x=1$ 일 때 $y = \sqrt{2(1)-1} = 1$ 이므로 점 A의 좌표는 $(1, 1)$ 이다. $x=5$ 일 때 $y = \sqrt{2(5)-1} = 3$ 이므로 점 B의 좌표는 $(5, 3)$ 이다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 기울기가 $\frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$ 이므로 $y-1 = \frac{1}{2}(x-1)$, 즉 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 이다. 곡선 $y = \sqrt{2x-1}$ 은 위로 볼록한 모양이므로, 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 곡선이 직선보다 위쪽에 있다.

따라서 구하는 넓이 S 는 정적분을 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$S = \int_1^5 (\sqrt{2x-1} - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}))dx$$

$$= [\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x]_1^5$$

$$= [\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x]_1^5$$

$$= (\frac{1}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{25}{4} - \frac{5}{2}) - (\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2})$$

$$= (\frac{27}{3} - \frac{35}{4}) - (\frac{1}{3} - \frac{3}{4})$$

$$= (9 - \frac{1}{4}) - (\frac{35}{4} - \frac{3}{4}) = 26 - \frac{32}{4} = 26 - 8 = 18$$

이다.

27. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 함수 등식을 만족시키는 미분계수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식 $f(x) + f(x^2 - x + 1) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) + f'(x^2 - x + 1)(2x - 1) = 8x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ 이다.

위 식에 $x = 1$ 을 대입하면 $x^2 - x + 1 = 1$ 이므로,

$$f'(1) + f'(1)(2 \cdot 1 - 1) = 8 - 6 + 6 - 1$$

$$2f'(1) = 7, \text{ 즉 } f'(1) = \frac{7}{2} \text{ 이다.}$$

다시 미분된 식에 $x = 0$ 을 대입하면 $x^2 - x + 1 = 1$ 이므로,

$$f'(0) + f'(1)(2 \cdot 0 - 1) = -1$$

$$f'(0) - f'(1) = -1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f'(0) = f'(1) - 1 = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

28. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 절댓값을 포함하고 정적분으로 정의된 함수가 실수 전체에서 미분가능할 조건을 이용하여 파라미터의 최댓값을 구한다.

[풀이]

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면,

$$h(x) = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^x f(t) dt$$

라 할 때 $h(c) = 0$ 인 모든 실수 c 에 대하여 $h'(c) = f(c) = 0$ 이 성립해야 한다.

$c = -\frac{\pi}{2a}$ 일 때, $h(-\frac{\pi}{2a}) = 0$ 이고 $f(-\frac{\pi}{2a}) = 2|\cos(a \cdot (-\frac{\pi}{2a}))| = 2|\cos(-\frac{\pi}{2})| = 0$ 이므로 이 지점에서는 조건이 항상 성립한다.

$x < 0$ 이고 $x \neq -\frac{\pi}{2a}$ 일 때, $f(x) = 2|\cos(ax)| \geq 0$ 이므로

$$h(x) = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^x f(t) dt$$

는 0 이 될 수 없다.

$x \geq 0$ 일 때,

$$h(x) = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^0 2|\cos(at)| dt + \int_0^x (-\sin t) dt$$

이다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2a}}^0 2|\cos(at)| dt = \int_{-\frac{\pi}{2a}}^0 2\cos(at) dt = 2[\frac{1}{a}\sin(at)]_{-\frac{\pi}{2a}}^0 = \frac{2}{a}(0 - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{2}{a}$$

이다.

$$\int_0^x (-\sin t) dt = [\cos t]_0^x = \cos x - 1$$

이다.

따라서 $x \geq 0$ 에서 $h(x) = \frac{2}{a} + \cos x - 1$ 이다.

함수 $h(x)$ 가 $x \geq 0$ 에서 0 이 되는 지점이 존재하려면, 방정식 $\cos x = 1 - \frac{2}{a}$ 가 해를 가져야 한다. 즉, $-1 \leq 1 - \frac{2}{a} \leq 1$ 이어야 한다.

$1 - \frac{2}{a} \leq 1$ 은 $a > 0$ 이므로 항상 성립하고, $-1 \leq 1 - \frac{2}{a}$ 에서 $\frac{2}{a} \leq 2$, 즉 $a \geq 1$ 이다.

만약 $a < 1$ 이면 $1 - \frac{2}{a} < -1$ 이므로 $h(x) = 0$ 인 해가 존재하지 않아 $g(x)$ 는 미분가능하다.

만약 $a \geq 1$ 이면 $h(c) = 0$ 인 해 c 가 존재할 수 있다. 이때 $f(c) = 0$ 이어야 하므로 $-\sin c = 0$, 즉 $c = k\pi$ (k 는 양의 정수)이다. 이 c 에 대해 $\cos c = \cos(k\pi) = (-1)^k$ 이므로, $h(c) = 0$ 조건에 대입하면 $1 - \frac{2}{a} = (-1)^k$ 이다.

k 가 짝수이면 $1 - \frac{2}{a} = 1$ 이므로 $\frac{2}{a} = 0$ 이 되어 모순이다.

k 가 홀수이면 $1 - \frac{2}{a} = -1$ 이므로 $\frac{2}{a} = 2$, 즉 $a = 1$ 이다.

따라서 $g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하기 위한 조건은 $a < 1$ 또는 $a = 1$ 이므로, $a \leq 1$ 이다.

주어진 a 의 범위가 $\frac{1}{2} < a < 3$ 이므로, 이를 만족하는 a 의 최댓값은 1 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 29

[출제의도] 등비급수의 수렴 조건과 합을 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가를 묻는다.

[풀이]

조건 (나)에서 삼차방정식 $x^3 - 19x^2 + 114x - 216 = 0$ 의 해를 구하면, $(x - 4)(x - 6)(x - 9) = 0$ 이므로 해는 $x = 4, 6, 9$ 이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 정수인 항은 4, 6, 9 뿐이다. 급수가 수렴하고 첫째항이 양수이므로 항의 절댓값은 감소해야 한다. 따라서 정수인 항들은 반드시 9, 6, 4 의 순서로 나타난다. 이 항들이 등비수열을 이루므로 공비 $r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 이다. 이 세 항이 연속하지 않는다고 가정하면 그 사이에 다른 정수 항이 생기거나, 공비가 $r^k = 2/3$ ($k > 1$ 인 정수) 형태가 되어 r 이 유리수라는 조건에 맞지 않을 수 있다. 따라서 이 세 항은 연속된 항, 즉 $a_k = 9, a_{k+1} = 6, a_{k+2} = 4$ 로 볼 수 있다. $a_{k-1} = 9 \div \frac{2}{3} = \frac{27}{2}$, $a_{k+3} = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ 이므로 정수인 항이 3 개뿐이라는 조건을 만족한다.

자연수 k 의 값에 따라 첫째항 a_1 과 급수의 합 S 가 달라지므로, 조건 (가)를 이용하여 k 값을 확정한다.

(i) $k = 1$ 일 때, $a_1 = 9$ 이고 $S = \frac{9}{1 - 2/3} = 27$ 이다. 이는 $40 < S < 50$ 을 만족하지 않는다.

(ii) $k = 2$ 일 때, $a_2 = 9$ 이므로 $a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{9}{2/3} = \frac{27}{2}$ 이다. $S = \frac{27/2}{1 - 2/3} = \frac{27/2}{1/3} = \frac{81}{2} = 40.5$ 이다. 이는 $40 < S < 50$ 을 만족한다.

(iii) $k = 3$ 일 때, $a_3 = 9$ 이므로 $a_1 = \frac{a_3}{r^2} = \frac{9}{(2/3)^2} = \frac{81}{4}$ 이다. $S = \frac{81/4}{1 - 2/3} = \frac{81/4}{1/3} = \frac{243}{4} = 60.75$ 이다. 이는 $40 < S < 50$ 을 만족하지 않는다.

따라서 $a_1 = \frac{27}{2}$ 이다. $a_1 = \frac{q}{p}$ 에서 $p = 2, q = 27$ 이고, 이들은 서로소인 자연수이다. 그러므로 $p + q = 2 + 27 = 29$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: ㉟

[출제의도] 절댓값을 포함하는 함수의 부정적분과 부등식 조건을 이용하여, 특정 지점에서의 함수값의 최솟값을 나타내는 함수의 성질을 추론하는 문제입니다.

[풀이]

$H(x) = F(x) - f(x)$ 라 하면, 모든 실수 x 에 대해 $H(x) \geq 0$ 입니다. $F'(x) = f(x)$ 이므로 $H'(x) = F'(x) - f'(x) = f(x) - f'(x)$ 입니다. $H(x)$ 의 최솟값은 극소점이거나 구간의 경계에서 발생합니다.

$x > 0$ 일 때 $f(x) = (k - x^2)e^{-x}$, $f'(x) = (x^2 - 2x - k)e^{-x}$ 이므로 $H'(x) = (-2x^2 + 2x + 2k)e^{-x}$ 입니다. $x < 0$ 일 때 $f(x) = (k - x^2)e^x$, $f'(x) = (-x^2 - 2x + k)e^x$ 이므로 $H'(x) = (2x)e^x$ 입니다. $x < 0$ 에서 $H'(x) < 0$ 이므로 $H(x)$ 는 감소하고, $x > 0$ 에서는 $H(x)$ 가 증가하다 감소하므로, $H(x)$ 의 최솟값은 $H(0)$ 또는 $x \rightarrow \pm \infty$ 일 때의 극한값 중에서 결정됩니다.

$f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 는 적분상수 C 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있습니다. (연속 조건 반영)

$$F(x) = \begin{cases} (x^2 + 2x + 2 - k)e^{-x} + C & (x \geq 0) \\ (-x^2 + 2x - 2 + k)e^x + C + 4 - 2k & (x < 0) \end{cases}$$

$$H(x) = F(x) - f(x)$$

이므로, $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = C$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = C + 4 - 2k$ 입니다.

$H(0) = F(0) - f(0) = (2 - k + C) - k = C + 2 - 2k$ 입니다.

$H(x) \geq 0$ 이려면 $C \geq 0$, $C \geq 2k - 4$, $C \geq 2k - 2$ 를 모두 만족해야 합니다. 이 중 가장 강한 조건은 $C \geq 0$ 과 $C \geq 2k - 2$ 입니다.

(i) $0 < k \leq 1$ 일 때, $2k - 2 \leq 0$ 이므로 $C_{\min} = 0$ 입니다. 이때 $F(0)$ 의 최솟값 $g(k) = (2 - k) + C_{\min} = 2 - k$ 입니다.

(ii) $k > 1$ 일 때, $2k - 2 > 0$ 이므로 $C_{\min} = 2k - 2$ 입니다. 이때 $F(0)$ 의 최솟값 $g(k) = (2 - k) + C_{\min} = (2 - k) + (2k - 2) = k$ 입니다.

함수

$$g(k) = \begin{cases} 2 - k & (0 < k \leq 1) \\ k & (k > 1) \end{cases}$$

는 $k = 1$ 에서 연속이지만, 좌미분계수는 -1 이고 우미분계수는 1 이므로 $k = 1$ 에서 미분가능하지 않습니다. 따라서 $a = 1$ 입니다.

구하는 값은 $g(\frac{a}{3}) + g(3a) = g(\frac{1}{3}) + g(3)$ 입니다.

$g(\frac{1}{3}) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ 이고 $g(3) = 3$ 이므로, $g(\frac{1}{3}) + g(3) = \frac{5}{3} + 3 = \frac{14}{3}$ 입니다.
