

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
④	③	⑤	③	③	③	③	③	②	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	③	③	③	5	7	2	4	15
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
38	27	③	③	③	③	48	③	③	140

1. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 식의 밑을 3으로 통일하기 위해 거듭제곱근을 지수로 변환하고 식을 정리한다.

$(\sqrt{3})^{\sqrt{8}} = (3^{\frac{1}{2}})^{2\sqrt{2}} = 3^{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 주어진 식은 지수법칙에 의해 $3^{\sqrt{2}} \div 3^{\sqrt{2}-1} = 3^{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)} = 3^1 = 3$ 으로 계산된다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 이를 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.

[풀이]

미분계수의 정의에 따라 주어진 극한값은 $f'(1)$ 과 같으므로 $f'(1) = 10$ 이다.

함수 $f(x) = 2x^3 + ax - 4$ 의 도함수는 $f'(x) = 6x^2 + a$ 이다.

따라서 $f'(1) = 6(1)^2 + a = 6 + a$ 이고, $6 + a = 10$ 이므로 구하는 상수 a 의 값은 4 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 각의 사분면 정보와 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 다른 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 를 변형하면 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{5}{2}$ 이므로, $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$ 이다.

구하고자 하는 값인 $\sin \theta - \cos \theta$ 의 제곱은 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2\sin \theta \cos \theta$ 이다.

이 식에 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$ 를 대입하면 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2(-\frac{2}{5}) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ 이다.

한편, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다. 따라서 $\sin \theta > 0$ 이고 $\cos \theta < 0$ 이므로, $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이다.

그러므로 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 좌극한과 평행이동된 함수의 우극한 값을 각각 구하고 그 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 $x < 1$ 일 때 $f(x) = -2x + 1$ 을 사용한다. 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 1) = -2(1) + 1 = -1$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1)$ 을 구하기 위해 $t = x + 1$ 로 치환하면, $x > 0$ 일 때 $t > 1$ 이다. 따라서 구하는 극한은 $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$ 와 같다. $t > 1$ 일 때 $f(t) = t + 2$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} (t + 2) = 1 + 2 = 3$ 이다.

따라서 두 극한값의 합은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고, 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 극한 조건 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = 3$ 에서 미분계수의 정의에 따라 $g(1) = 2$ 이고 $g'(1) = 3$ 이다.

함수 $f(x) = (x^3 - 2x + 3)g(x)$ 를 곱의 미분법을 이용하여 미분하면 $f'(x) = (3x^2 - 2)g(x) + (x^3 - 2x + 3)g'(x)$ 이다.

위 식에 $x = 1$ 을 대입하면 $f'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2)g(1) + (1^3 - 2 \cdot 1 + 3)g'(1) = (1)g(1) + (2)g'(1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수의 그래프 정보를 이용하여 원함수인 삼차함수의 극값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로, 도함수 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. $y = f'(x)$ 의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(1, -12)$ 인 포물선이므로 $f'(x) = 3(x - 1)^2 - 12$ 로 놓을 수 있다. 이 식을 전개하면 $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) - 12 = 3x^2 - 6x - 9$ 이다. 극값을 갖는 x 의 값을 구하기 위해 $f'(x) = 0$ 을 풀면 $3(x^2 - 2x - 3) = 0$, $3(x + 1)(x - 3) = 0$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 3$ 이다.

$f(x)$ 의 최고차항 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을, $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다. 문제의 조건에서 극솟값이 -20 이므로 $f(3) = -20$ 이다.

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x - 9)dx = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

(단, C 는 적분상수)이다. $f(3) = 3^3 - 3(3^2) - 9(3) + C = 27 - 27 - 27 + C = -27 + C = -20$ 이므로, $C = 7$ 이다. 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ 이다.

구하고자 하는 극댓값은 $f(-1)$ 이므로, $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 12이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곡선과 직선이 접할 조건을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이] 함수 $f(x) = x^3 + kx + 2$ 의 그래프와 직선 $y = -3x$ 가 접하는 점의 x 좌표를 t 라 하자. $f'(x) = 3x^2 + k$ 이므로 접점에서는 함수값과 미분계수가 각각 같아야 한다. 따라서 $f(t) = t^3 + kt + 2 = -3t$ 이고 $f'(t) = 3t^2 + k = -3$ 이다. 두 번째 식에서 $k = -3t^2 - 3$ 을 첫 번째 식에 대입하면 $t^3 + (-3t^2 - 3)t + 2 = -3t$ 가 된다. 이 식을 정리하면 $-2t^3 + 2 = 0$ 이므로 $t^3 = 1$, 즉 실수 $t = 1$ 이다. 따라서 $k = -3(1)^2 - 3 = -6$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식과 성질을 이용하여 직선의 방정식에 관련된 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

직선 $y = 2x + k$ 가 두 점 $(\log_3 a, 1)$ 과 $(2, \log_a 9)$ 를 지나므로, 각 점의 좌표를 대입하면 $1 = 2\log_3 a + k$ 와 $\log_a 9 = 4 + k$ 가 성립한다.

$t = \log_3 a$ 라 하면, 로그의 밑 변환 공식에 의해 $\log_a 9 = \log_a 3^2 = 2\log_a 3 = \frac{2}{\log_3 a} = \frac{2}{t}$ 이다.

두 식을 연립하여 k 를 소거하면, $k = 1 - 2t$ 이고 $k = \frac{2}{t} - 4$ 이므로 $1 - 2t = \frac{2}{t} - 4$ 이다.

양변에 t 를 곱하고 정리하면 $t - 2t^2 = 2 - 4t$, 즉 $2t^2 - 5t + 2 = 0$ 이다.

이차방정식을 풀면 $(2t - 1)(t - 2) = 0$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = 2$ 이다.

a 가 1 보다 큰 정수이므로 $a = 3^t$ 도 정수여야 한다. $t = \frac{1}{2}$ 이면 $a = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ 이므로 조건에 맞지 않고, $t = 2$ 이면 $a = 3^2 = 9$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 $a = 9$ 이고, 이때 $k = 1 - 2t = 1 - 2(2) = -3$ 이다.

그러므로 구하는 값은 $a + k = 9 + (-3) = 6$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 범위에서 삼각부등식의 해를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 부등식은 $\sin x \leq -\sin \frac{\pi}{9}$ 으로 정리할 수 있다.

삼각함수의 성질에 따라 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ 이므로, $-\sin \frac{\pi}{9} = \sin(\pi + \frac{\pi}{9}) = \sin \frac{10}{9}\pi$ 이다.

따라서 부등식은 $\sin x \leq \sin \frac{10}{9}\pi$ 이 된다.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \sin \frac{10}{9}\pi$ 의 해는 $x = \frac{10}{9}\pi$ 와 $x = \pi - \frac{10}{9}\pi = -\frac{\pi}{9}$ 이다. 주어진 x 의 범위에 맞게 조정하면 해는 $x = \frac{10}{9}\pi$ 와 $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi = \frac{17}{9}\pi$ 이다.

함수 $y = \sin x$ 의 그래프에서 부등식 $\sin x \leq \sin \frac{10}{9}\pi$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위는 $\frac{10}{9}\pi \leq x \leq \frac{17}{9}\pi$ 이다.

그러므로 $\alpha = \frac{10}{9}\pi$, $\beta = \frac{17}{9}\pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{17}{9}\pi - \frac{10}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 특정 항의 값을 구한다.

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면, 모든 항이 양수이므로 $a > 0$ 이고 $r > 0$ 이다.

주어진 조건 $a_2 + a_4 = 20$ 과 $S_4 = 30$ 을 a 와 r 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$a_2 + a_4 = ar + ar^3 = ar(1 + r^2) = 20$$

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^2 - 1)(r^2 + 1)}{r - 1} = a(r + 1)(r^2 + 1) = 30$$

위의 두 식을 나누면 $\frac{a(r + 1)(r^2 + 1)}{ar(r^2 + 1)} = \frac{30}{20}$, 즉 $\frac{r + 1}{r} = \frac{3}{2}$ 이다.

$2(r + 1) = 3r$ 에서 $2r + 2 = 3r$ 이므로 $r = 2$ 이다.

$r = 2$ 를 $ar(1 + r^2) = 20$ 에 대입하면 $a \cdot 2 \cdot (1 + 2^2) = 10a = 20$ 이므로 $a = 2$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 이다.

구하는 값은 $a_5 = 2^5 = 32$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 속도 함수를 미분하여 가속도 함수를 구하고, 적분하여 위치 함수를 구한 후, 특정 시각에서 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 가속도는 각각 $a_P(t) = v'_P(t) = 3t^2 - 4t - 3$ 이고 $a_Q(t) = v'_Q(t) = 2t - 3$ 이다. 두 점의 가속도가 같다고 하면 $3t^2 - 4t - 3 = 2t - 3$ 에서 $3t^2 - 6t = 3t(t - 2) = 0$ 이다. 따라서 출발 후($t > 0$) 가속도가 처음으로 같아지는 시각은 $t = 2$ 이다.

두 점 P, Q는 원점에서 출발했으므로 시각 t 에서의 위치는 정적분으로 구할 수 있다.

$$x_P(t) = \int_0^t (s^3 - 2s^2 - 3s)ds = \left[\frac{1}{4}s^4 - \frac{2}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$$x_Q(t) = \int_0^t (s^2 - 3s)ds = \left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$t = 2$ 일 때 두 점의 위치는 각각 $x_P(2) = \frac{1}{4}(16) - \frac{2}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) = 4 - \frac{16}{3} - 6 = -\frac{22}{3}$ 이고,

$x_Q(2) = \frac{1}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) = \frac{8}{3} - 6 = -\frac{10}{3}$ 이다. 따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_P(2) - x_Q(2)| = \left| -\frac{22}{3} - \left(-\frac{10}{3}\right) \right| = \left| -\frac{12}{3} \right| = 4$ 이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 조건에 따라 귀납적으로 정의된 수열의 항을 역추적하여 첫째항이 될 수 있는 모든 값의 합을 구하는 문제입니다.

[풀이]

수열 a_n 의 점화식으로부터 a_{n-1} 을 구하는 과정은 다음과 같습니다.

(i) $a_{n-1} = 2a_n$ (단, $2a_n$ 은 4의 배수여야 함)

(ii) $a_{n-1} = a_n - 3$ (단, $a_n - 3$ 은 4의 배수가 아니어야 함)

주어진 조건 $a_4 = 14$ 를 이용하여 a_3, a_2, a_1 을 차례로 구합니다.

1. a_3 구하기

(i) $a_3 = 2a_4 = 2 \times 14 = 28$. 28 은 4의 배수이므로 가능합니다.

(ii) $a_3 = a_4 - 3 = 14 - 3 = 11$. 11 은 4의 배수가 아니므로 가능합니다.

따라서 a_3 의 값은 11 또는 28 입니다.

2. a_2 구하기

- $a_3 = 11$ 인 경우:

(i) $a_2 = 2 \times 11 = 22$. 22 는 4의 배수가 아니므로 이 경우는 성립하지 않습니다.

(ii) $a_2 = 11 - 3 = 8$. 8 은 4의 배수이므로 이 경우도 성립하지 않습니다.

따라서 $a_3 = 11$ 이 되는 a_2 는 존재하지 않습니다.

- $a_3 = 28$ 인 경우:

(i) $a_2 = 2 \times 28 = 56$. 56 은 4의 배수이므로 가능합니다.

(ii) $a_2 = 28 - 3 = 25$. 25 는 4의 배수가 아니므로 가능합니다.

따라서 a_2 의 값은 25 또는 56 입니다.

3. a_1 구하기

- $a_2 = 25$ 인 경우:

(i) $a_1 = 2 \times 25 = 50$. 50 은 4의 배수가 아니므로 성립하지 않습니다.

(ii) $a_1 = 25 - 3 = 22$. 22 는 4의 배수가 아니므로 가능합니다. ($a_1 = 22$)

- $a_2 = 56$ 인 경우:

- (i) $a_1 = 2 \times 56 = 112$. 112 는 4의 배수이므로 가능합니다. ($a_1 = 112$)
 (ii) $a_1 = 56 - 3 = 53$. 53 은 4의 배수가 아니므로 가능합니다. ($a_1 = 53$)

가능한 모든 a_1 의 값은 22, 53, 112 입니다.
 따라서 모든 a_1 의 값의 합은 $22 + 53 + 112 = 187$ 입니다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 함수의 극한이 모든 실수에서 존재할 조건을 이차방정식의 실근에 대한 조건으로 바꾸어 해결할 수 있는가를 묻는다.

[풀이]
 주어진 극한값이 모든 실수 a 에 대하여 존재하려면, $\lim_{x \rightarrow a}$ 에서 분모가 0이 되는 경우 분자도 0이 되어야 한다. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ 는 항상 양수이므로 분모를 0으로 만드는 식은 $h(x) = f(x) - kx$ 이다. 즉, $h(x) = x^2 - (k + 4)x + 8 = 0$ 이다. 분자가 $(x - 2)^2$ 이므로, 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근은 $x = 2$ 만 가능하거나 존재하지 않아야 한다.

(i) 이차방정식 $h(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않는 경우:
 판별식 $D < 0$ 이어야 하므로, $D = (k + 4)^2 - 4(8) = (k + 4)^2 - 32 < 0$ 이다.
 $(k + 4)^2 < 32$ 에서 $-4\sqrt{2} < k + 4 < 4\sqrt{2}$ 이므로 $-4 - 4\sqrt{2} < k < -4 + 4\sqrt{2}$ 이다.
 $5 < 4\sqrt{2} < 6$ 이므로 $-4 - 5.65 \dots < k < -4 + 5.65 \dots$, 즉 $-9.65 \dots < k < 1.65 \dots$ 이다.
 이를 만족시키는 정수 k 는 $-9, -8, \dots, 0, 1$ 로 총 11개이다.

(ii) 이차방정식 $h(x) = 0$ 이 $x = 2$ 만을 실근으로 갖는 경우:
 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이므로 $(x - 2)^2$ 이 되어야 한다. $h(x) = x^2 - (k + 4)x + 8$ 과 $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ 의 상수항을 비교하면 $8 \neq 4$ 이므로 이 경우는 성립하지 않는다.

따라서 (i)의 경우만 가능하므로, 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 11개이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 원과 곡선의 교점 좌표를 추론하고 수열의 합을 구하는 문제이다.

[풀이]
 두 점 A_n, B_n 의 좌표를 각각 $(a, 3^a)$, $(b, 3^b)$ 라 하자. (단, $a < b$)
 조건 (가)에서 $\frac{a+b}{2} = n$ 이므로 $b = 2n - a$ 이다.
 조건 (나)에서 y 좌표의 차가 $8 \cdot 3^{n-1}$ 이므로 $3^b - 3^a = 8 \cdot 3^{n-1}$ 이다.
 $b = 2n - a$ 를 대입하면 $3^{2n-a} - 3^a = 8 \cdot 3^{n-1}$ 이다. 양변에 3^a 를 곱하고 정리하면 $(3^a)^2 + (8 \cdot 3^{n-1})3^a - 3^{2n} = 0$ 이다.
 이차방정식을 인수분해하면 $(3^a - 3^{n-1})(3^a + 9 \cdot 3^{n-1}) = 0$ 이고, $3^a > 0$ 이므로 $3^a = 3^{n-1}$, 즉 $a = n - 1$ 이다.
 따라서 $b = 2n - (n - 1) = n + 1$ 이므로, 두 점의 좌표는 $A_n(n - 1, 3^{n-1})$, $B_n(n + 1, 3^{n+1})$ 이다.
 두 곡선 $y = 3^x$ 와 $y = \log_3 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이고, 원의 중심도 직선 $y = x$ 위에 있으므로 원 또한 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이다.
 그러므로 원과 곡선 $y = \log_3 x$ 의 두 교점은 A_n, B_n 을 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이동한 두 점 $(3^{n-1}, n - 1)$ 과 $(3^{n+1}, n + 1)$ 이다.
 두 교점의 y 좌표는 $n - 1$ 과 $n + 1$ 이므로, 이 중 큰 값인 y_n 은 $y_n = n + 1$ 이다.
 따라서 구하는 값은 $y_1 + y_2 + y_3 = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) = 2 + 3 + 4 = 9$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한과 연속의 개념을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 찾고, 함수값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ 이므로, 주어진 조건 $g(2) = g(2) + 2$ 가 되어 모순이다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이고, 이는 $f(2) = 0$ 임을 의미한다. $f(2) = 0$ 이므로 $g(x)$ 의 정의에 따라 $g(2) = 8$ 이다. 이 값을 주어진 조건에 대입하면 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8 + 2 = 10$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)\{f(x)-6\}}{f(x)} = 10$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로, 극한값이 존재하기 위해서는 분자의 극한값도 0이어야 한다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x-2)\{f(x)-6\} = f(0)\{f(2)-6\} = f(0)(0-6) = -6f(0) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다. 이제 극한식을 미분계수의 정의를 이용하여 정리하면,

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-6\} = \frac{f'(0)}{f'(2)} \times (-6) = 10$ 이므로 $\frac{f'(0)}{f'(2)} = -\frac{5}{3}$ 이다. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0, f(2) = 0$ 이므로 $f(x) = x(x-2)(x-k)$ 로 놓을 수 있다. $f'(x) = (x-2)(x-k) + x(x-k) + x(x-2)$ 에서 $f'(0) = 2k, f'(2) = 2(2-k)$ 이므로 $\frac{2k}{2(2-k)} = \frac{k}{2-k} = -\frac{5}{3}$ 이다. $3k = -5(2-k)$ 에서 $3k = -10 + 5k, 2k = 10$ 이므로 $k = 5$ 이다. 따라서 $f(x) = x(x-2)(x-5)$ 이다.

$g(3)$ 의 값을 구하기 위해 먼저 $f(3)$ 을 계산하면 $f(3) = 3(3-2)(3-5) = -6$ 이다. $f(3) \neq 0$ 이므로 $g(x)$ 의 정의에 따라

$g(3) = \frac{f(3-2)\{f(3)-6\}}{f(3)} = \frac{f(1)\{-6-6\}}{-6} = \frac{f(1) \times (-12)}{-6} = 2f(1)$ 이다. $f(1) = 1(1-2)(1-5) = 4$ 이므로 $g(3) = 2 \times 4 = 8$ 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: 5

[출제의도] 주어진 점화식을 이용하여 수열의 특정 항의 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이] 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고, 점화식 $a_{n+1} = a_n + (-1)^n n$ 을 만족시킨다. 점화식에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하여 각 항을 구하면 다음과 같다.

$$a_2 = a_1 + (-1)^1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + (-1)^2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^3 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$$

$$a_5 = a_4 + (-1)^4 \cdot 4 = 1 + 4 = 5$$

따라서 a_5 의 값은 5이다.

17. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 도함수와 두 함수값의 관계식을 이용하여 부정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x) = 3x^2 - 2x$ 이므로 부정적분을 이용하면

$$f(x) = \int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2 + C$$

이다. (단, C 는 적분상수)

주어진 조건 $f(1) + f(-1) = 4$ 에 $f(1) = 1^3 - 1^2 + C = C$ 와 $f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + C = -2 + C$ 를 대입하면 $C + (-2 + C) = 4$ 이므로 $2C = 6$ 에서 $C = 3$ 을 얻는다.

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ 이므로, 구하는 값은 $f(2) = 2^3 - 2^2 + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.

[풀이]

주어진 극한은 미분계수의 정의에 의해 $f'(1) = 14$ 임을 의미한다.

함수 $f(x) = (x^2 + ax - 1)(x + 2)$ 에 곱의 미분법을 적용하면

$f'(x) = (2x + a)(x + 2) + (x^2 + ax - 1)(1)$ 이다.

위 식에 $x = 1$ 을 대입하면 $f'(1) = (2 + a)(1 + 2) + (1 + a - 1) = 3(2 + a) + a = 6 + 4a$ 이다.

$f'(1) = 14$ 이므로 $6 + 4a = 14$ 이고, 이를 풀면 $4a = 8$ 이므로 $a = 2$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: 4

[출제의도] 도함수를 활용하여 삼차함수의 극값을 미지수로 표현하고, 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구해 극값의 차를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$ 이다.

$a \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 과 $x = 2a$ 에서 극값을 갖는다. 두 극값은 $f(0) = 4a - 1$ 과

$f(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 + 4a - 1 = -4a^3 + 4a - 1$ 이다.

극값의 합은 $f(0) + f(2a) = (4a - 1) + (-4a^3 + 4a - 1) = -4a^3 + 8a - 2$ 이다.

주어진 조건에 따라 $-4a^3 + 8a - 2 = -4a^2 + 8a - 2$ 이므로, $a^3 - a^2 = 0$, 즉 $a^2(a - 1) = 0$ 이다.

$a \neq 0$ 이므로 $a = 1$ 이다.

$a = 1$ 일 때 두 극값은 $f(0) = 4(1) - 1 = 3$ 과 $f(2) = -4(1)^3 + 4(1) - 1 = -1$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는 $|3 - (-1)| = 4$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: 15

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 삼각함수의 그래프를 해석하여, 주어진 방정식의 실근 개수에 대한 조건을 만족하는 모든 미지수의 값의 합을 구한다.

[풀이] 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 3이 되는 k 의 값을 찾아야 한다. $f(x)$ 의 정의에 따라 그래프를 분석하면 다음과 같다.

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때 $f(x) = \sin x + 1$ 의 치역은 $[1, 2]$ 이며, $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 최댓값 2, $x = 0, \pi$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

$\pi < x \leq 2\pi$ 일 때 $f(x) = -3\sin x + 1$ 의 치역은 $[1, 4]$ 이며, $x = \frac{3\pi}{2}$ 에서 최댓값 4, $x = 2\pi$ 에서 값 1을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 3개인 경우는 $k = 1$ 또는 $k = 2$ 일 때이다. 따라서 $f(t) = 1$ 또는 $f(t) = 2$ 이다.

1) $f(t) = 1$ 인 경우:

$0 \leq t \leq \pi$ 에서 $\sin t + 1 = 1 \Rightarrow \sin t = 0$ 이므로 $t = 0$ 또는 $t = \pi$ 이다.

$\pi < t \leq 2\pi$ 에서 $-3\sin t + 1 = 1 \Rightarrow \sin t = 0$ 이므로 $t = 2\pi$ 이다.

따라서 t 의 값은 $0, \pi, 2\pi$ 이다.

2) $f(t) = 2$ 인 경우:

$0 \leq t \leq \pi$ 에서 $\sin t + 1 = 2 \Rightarrow \sin t = 1$ 이므로 $t = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\pi < t \leq 2\pi$ 에서 $-3\sin t + 1 = 2 \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{3}$ 이다. 이 방정식의 두 실근을 α, β 라 하면, 두 근은 $x = \frac{3\pi}{2}$ 에 대해 대칭이므로

$\alpha + \beta = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 t 의 값의 합은 $(0 + \pi + 2\pi) + (\frac{\pi}{2} + 3\pi) = 3\pi + \frac{7\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}$ 이다.

$\frac{q}{p}\pi = \frac{13}{2}\pi$ 이므로 $p = 2, q = 13$ 이다. 그러므로 $p + q = 2 + 13 = 15$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: 38

[출제의도] 등차수열의 합과 시그마의 성질을 이용하여, 자연수 및 배수 조건을 만족시키는 수열의 특정 항을 구하는 문제 해결 능력을 평가한다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 모든 항이 자연수이므로 a 와 d 는 자연수이다. (만약 $d \leq 0$ 이면 모든 항이 자연수라는 조건에 모순이 생긴다.)

주어진 조건

$$\sum_{k=1}^9 S_k = 930$$

에서,

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{j=1}^n (n-j+1)a_j$$

성질을 이용하면

$$\sum_{k=1}^9 S_k = \sum_{j=1}^9 (10-j)a_j$$

이다.

이 식을 등차중항인 a_5 와 공차 d 로 정리하면,

$$\sum_{j=1}^9 (10-j)(a_5 + (j-5)d) = a_5 \sum_{j=1}^9 (10-j) + d \sum_{j=1}^9 (10-j)(j-5) = 45a_5 - 60d$$

이다.

$45a_5 - 60d = 930$ 의 양변을 15로 나누면 $3a_5 - 4d = 62$ 이다.

$a_5 = a + 4d$ 를 대입하면 $3(a + 4d) - 4d = 62$ 이므로, $3a + 8d = 62$ 이다.

a, d 가 자연수이므로 $8d < 62$ 에서 d 는 1 이상 7 이하의 자연수이다. $3a = 62 - 8d$ 이므로 $62 - 8d$ 는 3의 배수여야 한다. 이를 만족하는 d 의 값은 1, 4, 7이다.

(i) $d = 1$ 일 때, $3a = 54$ 이므로 $a = 18$ 이다. 이때 $a_4 = 18 + 3(1) = 21$ 이다.

(ii) $d = 4$ 일 때, $3a = 30$ 이므로 $a = 10$ 이다. 이때 $a_4 = 10 + 3(4) = 22$ 이다.

(iii) $d = 7$ 일 때, $3a = 6$ 이므로 $a = 2$ 이다. 이때 $a_4 = 2 + 3(7) = 23$ 이다.

a_4 는 11의 배수이므로 (ii)의 경우만 해당된다. 따라서 $a = 10, d = 4$ 이다.

구하는 값은 $a_8 = a + 7d = 10 + 7(4) = 38$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 27

[출제의도] 지수함수 그래프 위의 점에 대하여 대칭이동으로 정의된 점들의 좌표를 구하고, 이를 이용하여 다각형의 넓이를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 $A(a, 2^a), B(b, 2^b)$ 이고, 문제의 조건에 의해 $a < b$ 이다. 점 P는 점 A를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 $P(2^a, a)$ 이다. 점 Q는 점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $Q(-b, -2^b)$ 이다.

조건 (가)에서 직선 AQ는 y 축에 평행하므로 두 점의 x 좌표가 같다. 따라서 $a = -b$ 이다. $a < b$ 이므로 $a < -a$, 즉 $2a < 0$ 에서 $a < 0$ 이다.

조건 (나)에서 직선 PB의 기울기는 $\frac{2^a}{7}$ 이다. 점 B의 좌표는 $B(-a, 2^{-a})$ 이므로, 직선 PB의 기울기는 $\frac{2^{-a} - a}{-a - 2^a} = \frac{a - 2^{-a}}{a + 2^a} = \frac{2^a}{7}$ 이다. 식을 정리하면 $7(a - 2^{-a}) = 24(a + 2^a)$ 이고, $17a + 24 \cdot 2^a + 7 \cdot 2^{-a} = 0$ 이다. 이 방정식은 $a = -2$ 일 때

$17(-2) + 24(2^{-2}) + 7(2^2) = -34 + 6 + 28 = 0$ 이므로 성립한다. 따라서 $a = -2, b = 2$ 이다.

네 점의 좌표는 각각 $A(-2, \frac{1}{4}), B(2, 4), P(\frac{1}{4}, -2), Q(-2, -4)$ 이다. 사각형 ABPQ의 넓이 S 를 신발끈 공식을 이용하여 구하면,

$$S = \frac{1}{2} |(x_A y_B + x_B y_P + x_P y_Q + x_Q y_A) - (y_A x_B + y_B x_P + y_P x_Q + y_Q x_A)| = \frac{1}{2} |((-2)(4) + (2)(-2) + (\frac{1}{4})(-4) + (-2)(\frac{1}{4})) - ((\frac{1}{4})(2) + (4)(\frac{1}{4}) + (-2)(-2) + (-4)(-2))| = \frac{1}{2} |(-\frac{27}{2}) - (\frac{27}{2})| = \frac{27}{2}$$

이다.
따라서 구하는 값은 $2S = 2 \times \frac{27}{2} = 27$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 좌표공간에서 특정 지점까지 이동하는 경로의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원점에서 점 $A(1, 2, 2)$ 까지 5번 만에 이동하려면 x 축 양의 방향으로 1번, y 축 양의 방향으로 2번, z 축 양의 방향으로 2번 이동해야 한다.

이는 x 축 방향 이동 1회, y 축 방향 이동 2회, z 축 방향 이동 2회의 총 5회 이동을 순서대로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 계산하면 $\frac{5!}{1!2!2!} = \frac{120}{4} = 30$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 여사건을 이용하여 특정 조건을 만족하는 최단 경로의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 점 $A(0, 0)$ 에서 점 $B(5, 3)$ 까지 최단 거리로 가는 전체 경로의 수는 가로 5칸, 세로 3칸을 이동하는 경우의 수이므로 $\frac{(5+3)!}{5!3!} = 56$ 이다.

선분 PQ를 지나지 않는 경로의 수를 구하기 위해 전체 경로의 수에서 선분 PQ를 반드시 지나는 경로의 수를 뺀다.

선분 PQ를 반드시 지나는 경로는 $(A \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow B)$ 순서로 이동하는 경로이다.

점 $A(0, 0)$ 에서 점 $P(2, 1)$ 까지 최단 경로의 수는 $\frac{(2+1)!}{2!1!} = 3$ 이다.

점 $P(2, 1)$ 에서 점 $Q(3, 1)$ 까지 이동하는 경로는 1가지이다.

점 $Q(3, 1)$ 에서 점 $B(5, 3)$ 까지 최단 경로의 수는 가로 2칸, 세로 2칸을 이동하는 경우이므로 $\frac{(2+2)!}{2!2!} = 6$ 이다.

따라서 선분 PQ를 반드시 지나는 경로의 수는 $3 \times 1 \times 6 = 18$ 이다.

구하는 경로의 수는 전체 경로의 수에서 선분 PQ를 지나는 경로의 수를 뺀 값이므로 $56 - 18 = 38$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 조합을 이용하여 특정 조건을 만족하는 사건의 확률을 계산할 수 있다.

[풀이]

전체 9개의 공 중에서 4개를 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는 $C(9, 4) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ 이다.

꺼낸 빨간 공의 개수와 파란 공의 개수가 서로 같은 사건에 해당하는 경우의 수를 구한다. 꺼낸 빨간 공과 파란 공의 개수를 각각 k 개라 하면 가능한 k 의 값은 0, 1, 2이다.

(i) $k = 0$ 일 때: 빨간 공 0개, 파란 공 0개, 노란 공 4개를 꺼내는 경우의 수는 $C(2, 0) \times C(3, 0) \times C(4, 4) = 1 \times 1 \times 1 = 1$ 이다.

(ii) $k = 1$ 일 때: 빨간 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 $C(2, 1) \times C(3, 1) \times C(4, 2) = 2 \times 3 \times 6 = 36$ 이다.

(iii) $k = 2$ 일 때: 빨간 공 2개, 파란 공 2개, 노란 공 0개를 꺼내는 경우의 수는 $C(2, 2) \times C(3, 2) \times C(4, 0) = 1 \times 3 \times 1 = 3$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의해 사건에 해당하는 경우의 수는 $1 + 36 + 3 = 40$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{126} = \frac{20}{63}$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 표본평균의 분포를 이해하고, 표준정규분포의 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(20, (\frac{\sigma}{\sqrt{16}})^2)$, 즉 $N(20, (\frac{\sigma}{4})^2)$ 을 따른다. 확률변수 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N(30, (\frac{2\sigma}{\sqrt{64}})^2)$, 즉 $N(30, (\frac{\sigma}{4})^2)$ 을 따른다.

주어진 조건 $P(\bar{X} \geq 25) = P(\bar{Y} \leq k)$ 에서 두 확률변수 $\bar{X}$ 와 $\bar{Y}$ 를 각각 표준화하면, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여 다음이 성립한다.

$$P\left(Z \geq \frac{25-20}{\sigma/4}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-30}{\sigma/4}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{5}{\sigma/4}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-30}{\sigma/4}\right)$$

표준정규분포곡선은 y 축에 대하여 대칭이므로, 모든 실수 a 에 대하여 $P(Z \geq a) = P(Z \leq -a)$ 가 성립한다. 따라서 $\frac{5}{\sigma/4} = -\frac{k-30}{\sigma/4}$ 이다.

$$5 = -(k-30) \quad \text{이므로, } 5 = -k + 30 \quad \text{에서 } k = 25 \quad \text{이다.}$$

따라서 만족시키는 상수 k 의 값은 25이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 48

[출제의도] 일대일함수의 정의를 이해하고, 여사건의 확률을 이용하여 특정 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하여 확률을 계산할 수 있다.

[풀이] 집합 X 에서 Y 로의 모든 일대일함수 f 의 개수는 7 개의 원소를 가지는 집합 Y 에서 4 개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ 이다.

조건 (가)에서 $f(2)$ 는 홀수이므로 $f(2)$ 가 될 수 있는 값은 집합 Y 의 원소 중 홀수인 1, 3, 5, 7 중 하나이다. 따라서 $f(2)$ 를 정하는 경우의 수는 4 이다.

$f(2)$ 가 어떤 홀수이든, 나머지 함수값 $f(1), f(3), f(4)$ 는 $f(2)$ 를 제외한 Y 의 원소 6개 중에서 서로 다른 3개의 값을 가져야 한다. $f(2)$ 가 홀수이므로 남은 6개의 원소는 짝수 W2, 4, 6W (3개)와 홀수 3개로 구성된다. 이 6개의 원소 중에서 $f(1), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 전체 경우의 수는 ${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ 이다.

조건 (나)에서 $f(1) \times f(3) \times f(4)$ 가 4의 배수이어야 한다. 이 사건의 여사건은 '곱이 4의 배수가 아닌 경우'이다.

곱이 4의 배수가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) $f(1), f(3), f(4)$ 가 모두 홀수인 경우:

남은 홀수 3개 중에서 3개를 택하여 나열하는 경우의 수이므로 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 이다.

(ii) $f(1), f(3), f(4)$ 중 하나는 4의 배수가 아닌 짝수(2 또는 6)이고 나머지 둘은 홀수인 경우:

짝수 W2, 6W 중에서 하나를 선택하고(${}_2C_1$), 홀수 3개 중에서 2개를 선택하여(${}_3C_2$), 이 3개의 수를 $f(1), f(3), f(4)$ 에 대응시키는 경우의 수이다.

이는 $({}_2C_1 \times {}_3C_2) \times 3! = (2 \times 3) \times 6 = 36$ 이다.

따라서 곱이 4의 배수가 아닌 경우의 수는 $6 + 36 = 42$ 이다.

그러므로 곱이 4의 배수인 경우의 수는 $120 - 42 = 78$ 이다.

$f(2)$ 를 정하는 경우가 4가지이고, 각각에 대하여 $f(1), f(3), f(4)$ 를 정하는 경우가 78가지이므로, 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 곱의 법칙에 의해 $4 \times 78 = 312$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{312}{840} = \frac{13 \times 24}{35 \times 24} = \frac{13}{35}$ 이다.

확률이 $\frac{q}{p} = \frac{13}{35}$ 이므로 $p = 35, q = 13$ 이고, $p + q = 35 + 13 = 48$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

먼저 조건 (나)를 만족하는 경우의 수를 구한다. 흰색, 검은색, 빨간색 공을 상자 A, B, C, D에 나누어 넣는 경우의 수는 각각 $4H2 = \binom{5}{2} = 10$ 이다. 상자 A에 들어가는 흰색, 검은색, 빨간색 공의 개수를 각각 w_A, b_A, r_A 라 하자. w_A, b_A, r_A 는 각각 0, 1, 2 의 값을 가질 수 있다. 조건 (나)에 의해 $w_A + b_A + r_A$ 는 홀수여야 한다.

한 가지 색의 공 2개를 4개의 상자에 넣을 때, A에 들어가는 공의 개수가 홀수인 경우(1 개)는 B, C, D에 1개를 나누어 넣는 경우의 수이므로 $3H1 = 3$ 이다. A에 들어가는 공의 개수가 짝수인 경우(0 개 또는 2 개)는 B, C, D에 2개 또는 0개를 나누어 넣는 경우이므로 $3H2 + 3H0 = 6 + 1 = 7$ 이다.

w_A, b_A, r_A 의 합이 홀수가 되려면 (홀,홀,홀)이거나 (홀,짝,짝)이어야 한다.

(i) w_A, b_A, r_A 가 모두 홀수인 경우: $3 \times 3 \times 3 = 27$

(ii) w_A, b_A, r_A 중 하나만 홀수인 경우: $\binom{3}{1} \times 3 \times 7 \times 7 = 441$

따라서 조건 (나)를 만족하는 경우의 수는 $27 + 441 = 468$ 이다.

다음으로, 위 경우에서 조건 (가)를 만족하지 않는 경우, 즉 빈 상자가 2개 이상인 경우를 제외한다. 조건 (나)에 의해 상자 A는 비어있을 수 없으므로, 빈 상자는 B, C, D 중에서 나온다.

(i) 빈 상자가 3개인 경우: B, C, D가 모두 비어있으면 모든 공이 A에 들어가므로 A에 있는 공의 개수는 6(짝수)이다. 이는 조건 (나)에 위배되므로 이 경우는 0이다.

(ii) 빈 상자가 2개인 경우: B, C, D 중 2개의 상자를 선택하여 비우는 경우의 수는 $\binom{3}{2} = 3$ 이다. B, C가 비어있다고 가정하면 공은 A와 D에만 들어간다. 이때 A와 D는 비어있을 수 없다. 공을 A, D 두 상자에만 넣는 경우 중 A에 들어가는 공의 개수가 홀수인 경우의 수를 구하면 된다. 한 색깔의 공 2개를 A, D에 넣을 때 A에 홀수 개(1개) 넣는 경우는 1가지, 짝수 개(0개 또는 2개) 넣는 경우는 2가지이다. w_A, b_A, r_A 의 합이 홀수가 되려면 (홀,홀,홀)인 경우 $1 \times 1 \times 1 = 1$ 가지, (홀,짝,짝)인 경우 $\binom{3}{1} \times 1 \times 2 \times 2 = 12$ 가지이다. 총 $1 + 12 = 13$ 가지이다. 이 13가지 경우는 A에 들어가는 공의 총 수가 6이 아니므로 D는 절대 빌 수 없다. 따라서 B, C, D 중 2개가 빈 상자인 경우의 수는 $3 \times 13 = 39$ 이다.

따라서 두 조건을 모두 만족하는 경우의 수는 $468 - 39 = 429$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 독립시행의 확률과 조건부확률을 결합하여 복합적인 상황의 확률을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

한 번의 시행에서 주머니 A를 선택할 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이고, 주머니 B를 선택할 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이다. 주머니 A에서 붉은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 주머니 B에서 붉은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

한 번의 시행에서 붉은 구슬이 나올 확률 $P(R)$ 은 $P(R) = P(A)P(R|A) + P(B)P(R|B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 이다. 시행을 4번 반복했을 때 붉은 구슬이 정확히 2번 나올 사건을 E 라 하면,

$$P(E) = {}_4C_2 \left(\frac{5}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 = 6 \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{6 \times 25 \times 16}{9^4} = \frac{2400}{6561} \text{ 이다.}$$

주머니 A가 정확히 1번 선택되는 사건을 F 라 하자. 우리가 구하고자 하는 확률은 $P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}$ 이다. $F \cap E$ 는 4번의 시행 중 주머니 A가 1번, 주머니 B가 3번 선택되고, 붉은 구슬이 총 2번 나오는 사건이다.

이는 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) A에서 붉은 구슬 1번, B에서 붉은 구슬 1번과 흰 구슬 2번이 나오는 경우:

시행 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$ 이다. 확률은 $12 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^2 = 12 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{81} = \frac{192}{6561}$ 이다.

(ii) A에서 흰 구슬 1번, B에서 붉은 구슬 2번과 흰 구슬 1번이 나오는 경우:

시행 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$ 이다. 확률은 $12 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = 12 \times \frac{2}{9} \times \frac{16}{81} \times \frac{2}{9} = \frac{768}{6561}$ 이다.

$$\text{따라서 } P(F \cap E) = \frac{192}{6561} + \frac{768}{6561} = \frac{960}{6561} \text{ 이다.}$$

$$\text{구하는 조건부확률은 } P(F|E) = \frac{960/6561}{2400/6561} = \frac{960}{2400} = \frac{96}{240} = \frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

30. 정답 및 풀이

정답: 140

[출제의도] 중복조합의 개념을 이해하고, 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 순서쌍의 개수를 나머지의 성질을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건 (나)는 $a \equiv 1 \pmod{3}$, $d \equiv 1 \pmod{3}$ 이고, $b \equiv c \pmod{3}$ 임을 의미한다. 1부터 14까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지에 따라 다음과 같이 세 집합으로 분류할 수 있다.

$$S_0 = \{3, 6, 9, 12\} \quad (4\text{개})$$

$$S_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\} \quad (5\text{개})$$

$$S_2 = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

(5개)

조건에 따라 a, d 는 집합 S_1 의 원소이고, b, c 는 S_0, S_1, S_2 중 같은 집합의 원소이다.

(i) $b, c \in S_1$ 인 경우:

a, b, c, d 가 모두 집합 S_1 의 원소이므로, 5개의 원소 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$${}_5H_4 = {}_{5+4-1}C_4 = {}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70 \text{ 이다.}$$

(ii) $b, c \in S_0$ 인 경우:

$a, d \in S_1$ 이고 $b, c \in S_0$ 이다. $a = 3a' - 2, d = 3d' - 2$ ($a', d' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) 와 $b = 3b', c = 3c'$ ($b', c' \in \{1, 2, 3, 4\}$) 로 놓을 수 있다.

조건 $a \leq b \leq c \leq d$ 는 $3a' - 2 \leq 3b' \leq 3c' \leq 3d' - 2$ 가 된다.

각 부등식을 정리하면 $a' \leq b', b' \leq c', c' < d'$ 를 얻는다. 즉 $a' \leq b' \leq c' \leq d' - 1$ 이다.

$a' \leq b' \leq c'$ 이고 b', c' 의 최댓값은 4이므로 a', b', c' 는 4 이하의 자연수이다. $d' \geq c' + 1 \geq 2$ 이므로 $d' - 1$ 은 1 이상 4 이하의 정수이다.

따라서 $1 \leq a' \leq b' \leq c' \leq d' - 1 \leq 4$ 를 만족시키는 순서쌍을 찾는 것과 같으므로, 4개의 자연수 $\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 4개를 중복하여 뽑는 경우의 수와 같다. ${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = 35$ 이다.

(iii) $b, c \in S_2$ 인 경우:

$a, d \in S_1$ 이고 $b, c \in S_2$ 이다. $a = 3a' - 2, d = 3d' - 2$ ($a', d' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) 와 $b = 3b' - 1, c = 3c' - 1$ ($b', c' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) 로 놓을 수 있다.

조건 $a \leq b \leq c \leq d$ 는 $3a' - 2 \leq 3b' - 1 \leq 3c' - 1 \leq 3d' - 2$ 가 된다.

각 부등식을 정리하면 $a' \leq b', b' \leq c', c' < d'$ 를 얻는다. 즉 $a' \leq b' \leq c' \leq d' - 1$ 이다.

a', b', c', d' 는 모두 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 원소이다. $a' \leq b' \leq c' \leq d' - 1$ 이고 $d' \leq 5$ 이므로 $d' - 1 \leq 4$ 이다. 또한 $c' \leq d' - 1$ 이고 $c' \geq 1$ 이므로 $d' - 1 \geq 1$ 이다.

따라서 $1 \leq a' \leq b' \leq c' \leq d' - 1 \leq 4$ 를 만족시키는 순서쌍을 찾는 것과 같으므로, 4개의 자연수 $\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 4개를 중복하여 뽑는 경우의 수와 같다. ${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$ 이다.

(i), (ii), (iii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 모든 순서쌍의 개수는 $70 + 35 + 35 = 140$ 이다.