

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
④	③	⑤	③	③	③	③	③	②	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	③	③	③	5	7	2	4	15
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
38	27	②	③	③	②	④	③	46	20

1. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 식의 밑을 3으로 통일하기 위해 거듭제곱근을 지수로 변환하고 식을 정리한다.

$$(\sqrt{3})^{\sqrt{8}} = (3^{\frac{1}{2}})^{2\sqrt{2}} = 3^{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}} \quad \text{이다.}$$

따라서 주어진 식은 지수법칙에 의해 $3^{\sqrt{2}} \div 3^{\sqrt{2}-1} = 3^{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)} = 3^1 = 3$ 으로 계산된다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 이를 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.

[풀이]

미분계수의 정의에 따라 주어진 극한값은 $f'(1)$ 과 같으므로 $f'(1) = 10$ 이다.

함수 $f(x) = 2x^3 + ax - 4$ 의 도함수는 $f'(x) = 6x^2 + a$ 이다.

따라서 $f'(1) = 6(1)^2 + a = 6 + a$ 이고, $6 + a = 10$ 이므로 구하는 상수 a 의 값은 4 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 각의 사분면 정보와 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 다른 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 조건 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 를 변형하면 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{5}{2}$ 이므로, $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$ 이다.

구하고자 하는 값인 $\sin \theta - \cos \theta$ 의 제곱은 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2\sin \theta \cos \theta$ 이다.

이 식에 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{5}$ 를 대입하면 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2(-\frac{2}{5}) = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ 이다.

한편, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다. 따라서 $\sin \theta > 0$ 이고 $\cos \theta < 0$ 이므로, $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이다.

그러므로 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 좌극한과 평행이동된 함수의 우극한 값을 각각 구하고 그 합을 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 $x < 1$ 일 때 $f(x) = -2x + 1$ 을 사용한다. 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 1) = -2(1) + 1 = -1$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+1)$ 을 구하기 위해 $t = x + 1$ 로 치환하면, $x > 0$ 일 때 $t > 1$ 이다. 따라서 구하는 극한은 $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$ 와 같다. $t > 1$ 일 때 $f(t) = t + 2$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} (t + 2) = 1 + 2 = 3$ 이다.

따라서 두 극한값의 합은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고, 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 극한 조건 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = 3$ 에서 미분계수의 정의에 따라 $g(1) = 2$ 이고 $g'(1) = 3$ 이다.

함수 $f(x) = (x^3 - 2x + 3)g(x)$ 를 곱의 미분법을 이용하여 미분하면 $f'(x) = (3x^2 - 2)g(x) + (x^3 - 2x + 3)g'(x)$ 이다.

위 식에 $x = 1$ 을 대입하면 $f'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2)g(1) + (1^3 - 2 \cdot 1 + 3)g'(1) = (1)g(1) + (2)g'(1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 도함수의 그래프 정보를 이용하여 원함수인 삼차함수의 극값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로, 도함수 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. $y = f'(x)$ 의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(1, -12)$ 인 포물선이므로 $f'(x) = 3(x - 1)^2 - 12$ 로 놓을 수 있다. 이 식을 전개하면 $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) - 12 = 3x^2 - 6x - 9$ 이다. 극값을 갖는 x 의 값을 구하기 위해 $f'(x) = 0$ 을 풀면 $3(x^2 - 2x - 3) = 0$, $3(x + 1)(x - 3) = 0$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 3$ 이다.

$f(x)$ 의 최고차항 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을, $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다. 문제의 조건에서 극솟값이 -20 이므로 $f(3) = -20$ 이다.

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x - 9)dx = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

(단, C 는 적분상수)이다. $f(3) = 3^3 - 3(3^2) - 9(3) + C = 27 - 27 - 27 + C = -27 + C = -20$ 이므로, $C = 7$ 이다. 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ 이다.

구하고자 하는 극댓값은 $f(-1)$ 이므로, $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 12이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 곡선과 직선이 접할 조건을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이] 함수 $f(x) = x^3 + kx + 2$ 의 그래프와 직선 $y = -3x$ 가 접하는 점의 x 좌표를 t 라 하자. $f'(x) = 3x^2 + k$ 이므로 접점에서는 함수값과 미분계수가 각각 같아야 한다. 따라서 $f(t) = t^3 + kt + 2 = -3t$ 이고 $f'(t) = 3t^2 + k = -3$ 이다. 두 번째 식에서 $k = -3t^2 - 3$ 을 첫 번째 식에 대입하면 $t^3 + (-3t^2 - 3)t + 2 = -3t$ 가 된다. 이 식을 정리하면 $-2t^3 + 2 = 0$ 이므로 $t^3 = 1$, 즉 실수 $t = 1$ 이다. 따라서 $k = -3(1)^2 - 3 = -6$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식과 성질을 이용하여 직선의 방정식에 관련된 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

직선 $y = 2x + k$ 가 두 점 $(\log_3 a, 1)$ 과 $(2, \log_a 9)$ 를 지나므로, 각 점의 좌표를 대입하면 $1 = 2\log_3 a + k$ 와 $\log_a 9 = 4 + k$ 가 성립한다.

$t = \log_3 a$ 라 하면, 로그의 밑 변환 공식에 의해 $\log_a 9 = \log_a 3^2 = 2\log_a 3 = \frac{2}{\log_3 a} = \frac{2}{t}$ 이다.

두 식을 연립하여 k 를 소거하면, $k = 1 - 2t$ 이고 $k = \frac{2}{t} - 4$ 이므로 $1 - 2t = \frac{2}{t} - 4$ 이다.

양변에 t 를 곱하고 정리하면 $t - 2t^2 = 2 - 4t$, 즉 $2t^2 - 5t + 2 = 0$ 이다.

이차방정식을 풀면 $(2t - 1)(t - 2) = 0$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = 2$ 이다.

a 가 1 보다 큰 정수이므로 $a = 3^t$ 도 정수여야 한다. $t = \frac{1}{2}$ 이면 $a = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ 이므로 조건에 맞지 않고, $t = 2$ 이면 $a = 3^2 = 9$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 $a = 9$ 이고, 이때 $k = 1 - 2t = 1 - 2(2) = -3$ 이다.

그러므로 구하는 값은 $a + k = 9 + (-3) = 6$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 범위에서 삼각부등식의 해를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 부등식은 $\sin x \leq -\sin \frac{\pi}{9}$ 으로 정리할 수 있다.

삼각함수의 성질에 따라 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ 이므로, $-\sin \frac{\pi}{9} = \sin(\pi + \frac{\pi}{9}) = \sin \frac{10}{9}\pi$ 이다.

따라서 부등식은 $\sin x \leq \sin \frac{10}{9}\pi$ 이 된다.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \sin \frac{10}{9}\pi$ 의 해는 $x = \frac{10}{9}\pi$ 와 $x = \pi - \frac{10}{9}\pi = -\frac{\pi}{9}$ 이다. 주어진 x 의 범위에 맞게 조정하면 해는 $x = \frac{10}{9}\pi$ 와 $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi = \frac{17}{9}\pi$ 이다.

함수 $y = \sin x$ 의 그래프에서 부등식 $\sin x \leq \sin \frac{10}{9}\pi$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위는 $\frac{10}{9}\pi \leq x \leq \frac{17}{9}\pi$ 이다.

그러므로 $\alpha = \frac{10}{9}\pi$, $\beta = \frac{17}{9}\pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{17}{9}\pi - \frac{10}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합의 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 특정 항의 값을 구한다.

[풀이]

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면, 모든 항이 양수이므로 $a > 0$ 이고 $r > 0$ 이다.

주어진 조건 $a_2 + a_4 = 20$ 과 $S_4 = 30$ 을 a 와 r 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$a_2 + a_4 = ar + ar^3 = ar(1 + r^2) = 20$$

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^2 - 1)(r^2 + 1)}{r - 1} = a(r + 1)(r^2 + 1) = 30$$

위의 두 식을 나누면 $\frac{a(r + 1)(r^2 + 1)}{ar(r^2 + 1)} = \frac{30}{20}$, 즉 $\frac{r + 1}{r} = \frac{3}{2}$ 이다.

$$2(r + 1) = 3r \text{ 에서 } 2r + 2 = 3r \text{ 이므로 } r = 2 \text{ 이다.}$$

$$r = 2 \text{ 를 } ar(1 + r^2) = 20 \text{ 에 대입하면 } a \cdot 2 \cdot (1 + 2^2) = 10a = 20 \text{ 이므로 } a = 2 \text{ 이다.}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 이다.

구하는 값은 $a_5 = 2^5 = 32$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 속도 함수를 미분하여 가속도 함수를 구하고, 적분하여 위치 함수를 구한 후, 특정 시각에서 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 가속도는 각각 $a_P(t) = v'_P(t) = 3t^2 - 4t - 3$ 이고 $a_Q(t) = v'_Q(t) = 2t - 3$ 이다. 두 점의 가속도가 같다고 하면 $3t^2 - 4t - 3 = 2t - 3$ 에서 $3t^2 - 6t = 3t(t - 2) = 0$ 이다. 따라서 출발 후($t > 0$) 가속도가 처음으로 같아지는 시각은 $t = 2$ 이다.

두 점 P, Q는 원점에서 출발했으므로 시각 t 에서의 위치는 정적분으로 구할 수 있다.

$$x_P(t) = \int_0^t (s^3 - 2s^2 - 3s)ds = \left[\frac{1}{4}s^4 - \frac{2}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$$x_Q(t) = \int_0^t (s^2 - 3s)ds = \left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{3}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$t = 2$ 일 때 두 점의 위치는 각각 $x_P(2) = \frac{1}{4}(16) - \frac{2}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) = 4 - \frac{16}{3} - 6 = -\frac{22}{3}$ 이고,

$x_Q(2) = \frac{1}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) = \frac{8}{3} - 6 = -\frac{10}{3}$ 이다. 따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_P(2) - x_Q(2)| = \left| -\frac{22}{3} - \left(-\frac{10}{3}\right) \right| = \left| -\frac{12}{3} \right| = 4 \text{ 이다.}$$

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 조건에 따라 귀납적으로 정의된 수열의 항을 역추적하여 첫째항이 될 수 있는 모든 값의 합을 구하는 문제입니다.

[풀이]

수열 a_n 의 점화식으로부터 a_{n-1} 을 구하는 과정은 다음과 같습니다.

(i) $a_{n-1} = 2a_n$ (단, $2a_n$ 은 4의 배수여야 함)

(ii) $a_{n-1} = a_n - 3$ (단, $a_n - 3$ 은 4의 배수가 아니어야 함)

주어진 조건 $a_4 = 14$ 를 이용하여 a_3, a_2, a_1 을 차례로 구합니다.

1. a_3 구하기

(i) $a_3 = 2a_4 = 2 \times 14 = 28$. 28 은 4의 배수이므로 가능합니다.

(ii) $a_3 = a_4 - 3 = 14 - 3 = 11$. 11 은 4의 배수가 아니므로 가능합니다.

따라서 a_3 의 값은 11 또는 28 입니다.

2. a_2 구하기

- $a_3 = 11$ 인 경우:

(i) $a_2 = 2 \times 11 = 22$. 22 는 4의 배수가 아니므로 이 경우는 성립하지 않습니다.

(ii) $a_2 = 11 - 3 = 8$. 8 은 4의 배수이므로 이 경우도 성립하지 않습니다.

따라서 $a_3 = 11$ 이 되는 a_2 는 존재하지 않습니다.

- $a_3 = 28$ 인 경우:

(i) $a_2 = 2 \times 28 = 56$. 56 은 4의 배수이므로 가능합니다.

(ii) $a_2 = 28 - 3 = 25$. 25 는 4의 배수가 아니므로 가능합니다.

따라서 a_2 의 값은 25 또는 56 입니다.

3. a_1 구하기

- $a_2 = 25$ 인 경우:

(i) $a_1 = 2 \times 25 = 50$. 50 은 4의 배수가 아니므로 성립하지 않습니다.

(ii) $a_1 = 25 - 3 = 22$. 22 는 4의 배수가 아니므로 가능합니다. ($a_1 = 22$)

- $a_2 = 56$ 인 경우:

- (i) $a_1 = 2 \times 56 = 112$. 112 는 4의 배수이므로 가능합니다. ($a_1 = 112$)
 (ii) $a_1 = 56 - 3 = 53$. 53 은 4의 배수가 아니므로 가능합니다. ($a_1 = 53$)

가능한 모든 a_1 의 값은 22, 53, 112 입니다.
 따라서 모든 a_1 의 값의 합은 $22 + 53 + 112 = 187$ 입니다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한이 모든 실수에서 존재할 조건을 이차방정식의 실근에 대한 조건으로 바꾸어 해결할 수 있는가를 묻는다.

[풀이]

주어진 극한값이 모든 실수 a 에 대하여 존재하려면, $\lim_{x \rightarrow a}$ 에서 분모가 0이 되는 경우 분자도 0이 되어야 한다. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ 는 항상 양수이므로 분모를 0으로 만드는 식은 $h(x) = f(x) - kx$ 이다. 즉, $h(x) = x^2 - (k + 4)x + 8 = 0$ 이다. 분자가 $(x - 2)^2$ 이므로, 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근은 $x = 2$ 만 가능하거나 존재하지 않아야 한다.

- (i) 이차방정식 $h(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않는 경우:
 판별식 $D < 0$ 이어야 하므로, $D = (k + 4)^2 - 4(8) = (k + 4)^2 - 32 < 0$ 이다.
 $(k + 4)^2 < 32$ 에서 $-4\sqrt{2} < k + 4 < 4\sqrt{2}$ 이므로 $-4 - 4\sqrt{2} < k < -4 + 4\sqrt{2}$ 이다.
 $5 < 4\sqrt{2} < 6$ 이므로 $-4 - 5.65... < k < -4 + 5.65...$, 즉 $-9.65... < k < 1.65...$ 이다.
 이를 만족시키는 정수 k 는 $-9, -8, \dots, 0, 1$ 로 총 11개이다.

- (ii) 이차방정식 $h(x) = 0$ 이 $x = 2$ 만을 실근으로 갖는 경우:
 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이므로 $(x - 2)^2$ 이 되어야 한다. $h(x) = x^2 - (k + 4)x + 8$ 과 $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ 의 상수항을 비교하면 $8 \neq 4$ 이므로 이 경우는 성립하지 않는다.

따라서 (i)의 경우만 가능하므로, 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 11개이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 원과 곡선의 교점 좌표를 추론하고 수열의 합을 구하는 문제이다.

[풀이]

두 점 A_n, B_n 의 좌표를 각각 $(a, 3^a)$, $(b, 3^b)$ 라 하자. (단, $a < b$)
 조건 (가)에서 $\frac{a+b}{2} = n$ 이므로 $b = 2n - a$ 이다.
 조건 (나)에서 y 좌표의 차가 $8 \cdot 3^{n-1}$ 이므로 $3^b - 3^a = 8 \cdot 3^{n-1}$ 이다.
 $b = 2n - a$ 를 대입하면 $3^{2n-a} - 3^a = 8 \cdot 3^{n-1}$ 이다. 양변에 3^a 를 곱하고 정리하면 $(3^a)^2 + (8 \cdot 3^{n-1})3^a - 3^{2n} = 0$ 이다.
 이차방정식을 인수분해하면 $(3^a - 3^{n-1})(3^a + 9 \cdot 3^{n-1}) = 0$ 이고, $3^a > 0$ 이므로 $3^a = 3^{n-1}$, 즉 $a = n - 1$ 이다.
 따라서 $b = 2n - (n - 1) = n + 1$ 이므로, 두 점의 좌표는 $A_n(n - 1, 3^{n-1})$, $B_n(n + 1, 3^{n+1})$ 이다.
 두 곡선 $y = 3^x$ 와 $y = \log_3 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이고, 원의 중심도 직선 $y = x$ 위에 있으므로 원 또한 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이다.
 그러므로 원과 곡선 $y = \log_3 x$ 의 두 교점은 A_n, B_n 을 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이동한 두 점 $(3^{n-1}, n - 1)$ 과 $(3^{n+1}, n + 1)$ 이다.
 두 교점의 y 좌표는 $n - 1$ 과 $n + 1$ 이므로, 이 중 큰 값인 y_n 은 $y_n = n + 1$ 이다.
 따라서 구하는 값은 $y_1 + y_2 + y_3 = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) = 2 + 3 + 4 = 9$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한과 연속의 개념을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 찾고, 함수값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ 이므로, 주어진 조건 $g(2) = g(2) + 2$ 가 되어 모순이다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이고, 이는 $f(2) = 0$ 임을 의미한다. $f(2) = 0$ 이므로 $g(x)$ 의 정의에 따라 $g(2) = 8$ 이다. 이 값을 주어진 조건에 대입하면 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8 + 2 = 10$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)\{f(x)-6\}}{f(x)} = 10$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로, 극한값이 존재하기 위해서는 분자의 극한값도 0이어야 한다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x-2)\{f(x)-6\} = f(0)\{f(2)-6\} = f(0)(0-6) = -6f(0) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다. 이제 극한식을 미분계수의 정의를 이용하여 정리하면,

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-6\} = \frac{f'(0)}{f'(2)} \times (-6) = 10$ 이므로 $\frac{f'(0)}{f'(2)} = -\frac{5}{3}$ 이다. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0, f(2) = 0$ 이므로 $f(x) = x(x-2)(x-k)$ 로 놓을 수 있다. $f'(x) = (x-2)(x-k) + x(x-k) + x(x-2)$ 에서 $f'(0) = 2k, f'(2) = 2(2-k)$ 이므로 $\frac{2k}{2(2-k)} = \frac{k}{2-k} = -\frac{5}{3}$ 이다. $3k = -5(2-k)$ 에서 $3k = -10 + 5k, 2k = 10$ 이므로 $k = 5$ 이다. 따라서 $f(x) = x(x-2)(x-5)$ 이다.

$g(3)$ 의 값을 구하기 위해 먼저 $f(3)$ 을 계산하면 $f(3) = 3(3-2)(3-5) = -6$ 이다. $f(3) \neq 0$ 이므로 $g(x)$ 의 정의에 따라

$g(3) = \frac{f(3-2)\{f(3)-6\}}{f(3)} = \frac{f(1)\{-6-6\}}{-6} = \frac{f(1) \times (-12)}{-6} = 2f(1)$ 이다. $f(1) = 1(1-2)(1-5) = 4$ 이므로 $g(3) = 2 \times 4 = 8$ 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: 5

[출제의도] 주어진 점화식을 이용하여 수열의 특정 항의 값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이] 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고, 점화식 $a_{n+1} = a_n + (-1)^n n$ 을 만족시킨다. 점화식에 $n = 1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하여 각 항을 구하면 다음과 같다.

$$a_2 = a_1 + (-1)^1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + (-1)^2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^3 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$$

$$a_5 = a_4 + (-1)^4 \cdot 4 = 1 + 4 = 5$$

따라서 a_5 의 값은 5이다.

17. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 도함수와 두 함수값의 관계식을 이용하여 부정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x) = 3x^2 - 2x$ 이므로 부정적분을 이용하면

$$f(x) = \int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2 + C$$

이다. (단, C 는 적분상수)

주어진 조건 $f(1) + f(-1) = 4$ 에 $f(1) = 1^3 - 1^2 + C = C$ 와 $f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + C = -2 + C$ 를 대입하면 $C + (-2 + C) = 4$ 이므로 $2C = 6$ 에서 $C = 3$ 을 얻는다.

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ 이므로, 구하는 값은 $f(2) = 2^3 - 2^2 + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미정계수를 구할 수 있다.

[풀이]

주어진 극한은 미분계수의 정의에 의해 $f'(1) = 14$ 임을 의미한다.

함수 $f(x) = (x^2 + ax - 1)(x + 2)$ 에 곱의 미분법을 적용하면

$f'(x) = (2x + a)(x + 2) + (x^2 + ax - 1)(1)$ 이다.

위 식에 $x = 1$ 을 대입하면 $f'(1) = (2 + a)(1 + 2) + (1 + a - 1) = 3(2 + a) + a = 6 + 4a$ 이다.

$f'(1) = 14$ 이므로 $6 + 4a = 14$ 이고, 이를 풀면 $4a = 8$ 이므로 $a = 2$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: 4

[출제의도] 도함수를 활용하여 삼차함수의 극값을 미지수로 표현하고, 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구해 극값의 차를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$ 이다.

$a \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 과 $x = 2a$ 에서 극값을 갖는다. 두 극값은 $f(0) = 4a - 1$ 과

$f(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 + 4a - 1 = -4a^3 + 4a - 1$ 이다.

극값의 합은 $f(0) + f(2a) = (4a - 1) + (-4a^3 + 4a - 1) = -4a^3 + 8a - 2$ 이다.

주어진 조건에 따라 $-4a^3 + 8a - 2 = -4a^2 + 8a - 2$ 이므로, $a^3 - a^2 = 0$, 즉 $a^2(a - 1) = 0$ 이다.

$a \neq 0$ 이므로 $a = 1$ 이다.

$a = 1$ 일 때 두 극값은 $f(0) = 4(1) - 1 = 3$ 과 $f(2) = -4(1)^3 + 4(1) - 1 = -1$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는 $|3 - (-1)| = 4$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: 15

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 삼각함수의 그래프를 해석하여, 주어진 방정식의 실근 개수에 대한 조건을 만족하는 모든 미지수의 값의 합을 구한다.

[풀이] 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 3이 되는 k 의 값을 찾아야 한다. $f(x)$ 의 정의에 따라 그래프를 분석하면 다음과 같다.

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때 $f(x) = \sin x + 1$ 의 치역은 $[1, 2]$ 이며, $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 최댓값 2, $x = 0, \pi$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

$\pi < x \leq 2\pi$ 일 때 $f(x) = -3\sin x + 1$ 의 치역은 $[1, 4]$ 이며, $x = \frac{3\pi}{2}$ 에서 최댓값 4, $x = 2\pi$ 에서 값 1을 갖는다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 3개인 경우는 $k = 1$ 또는 $k = 2$ 일 때이다. 따라서 $f(t) = 1$ 또는 $f(t) = 2$ 이다.

1) $f(t) = 1$ 인 경우:

$0 \leq t \leq \pi$ 에서 $\sin t + 1 = 1 \Rightarrow \sin t = 0$ 이므로 $t = 0$ 또는 $t = \pi$ 이다.

$\pi < t \leq 2\pi$ 에서 $-3\sin t + 1 = 1 \Rightarrow \sin t = 0$ 이므로 $t = 2\pi$ 이다.

따라서 t 의 값은 $0, \pi, 2\pi$ 이다.

2) $f(t) = 2$ 인 경우:

$0 \leq t \leq \pi$ 에서 $\sin t + 1 = 2 \Rightarrow \sin t = 1$ 이므로 $t = \frac{\pi}{2}$ 이다.

$\pi < t \leq 2\pi$ 에서 $-3\sin t + 1 = 2 \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{3}$ 이다. 이 방정식의 두 실근을 α, β 라 하면, 두 근은 $x = \frac{3\pi}{2}$ 에 대해 대칭이므로

$\alpha + \beta = 2 \times \frac{3\pi}{2} = 3\pi$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 t 의 값의 합은 $(0 + \pi + 2\pi) + (\frac{\pi}{2} + 3\pi) = 3\pi + \frac{7\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}$ 이다.

$\frac{q}{p}\pi = \frac{13}{2}\pi$ 이므로 $p = 2, q = 13$ 이다. 그러므로 $p + q = 2 + 13 = 15$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: 38

[출제의도] 등차수열의 합과 시그마의 성질을 이용하여, 자연수 및 배수 조건을 만족시키는 수열의 특정 항을 구하는 문제 해결 능력을 평가한다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 모든 항이 자연수이므로 a 와 d 는 자연수이다. (만약 $d \leq 0$ 이면 모든 항이 자연수라는 조건에 모순이 생긴다.)

주어진 조건

$$\sum_{k=1}^9 S_k = 930$$

에서,

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{j=1}^n (n-j+1)a_j$$

성질을 이용하면

$$\sum_{k=1}^9 S_k = \sum_{j=1}^9 (10-j)a_j$$

이다.

이 식을 등차중항인 a_5 와 공차 d 로 정리하면,

$$\sum_{j=1}^9 (10-j)(a_5 + (j-5)d) = a_5 \sum_{j=1}^9 (10-j) + d \sum_{j=1}^9 (10-j)(j-5) = 45a_5 - 60d$$

이다.

$45a_5 - 60d = 930$ 의 양변을 15로 나누면 $3a_5 - 4d = 62$ 이다.

$a_5 = a + 4d$ 를 대입하면 $3(a + 4d) - 4d = 62$ 이므로, $3a + 8d = 62$ 이다.

a, d 가 자연수이므로 $8d < 62$ 에서 d 는 1 이상 7 이하의 자연수이다. $3a = 62 - 8d$ 이므로 $62 - 8d$ 는 3의 배수여야 한다. 이를 만족하는 d 의 값은 1, 4, 7이다.

(i) $d = 1$ 일 때, $3a = 54$ 이므로 $a = 18$ 이다. 이때 $a_4 = 18 + 3(1) = 21$ 이다.

(ii) $d = 4$ 일 때, $3a = 30$ 이므로 $a = 10$ 이다. 이때 $a_4 = 10 + 3(4) = 22$ 이다.

(iii) $d = 7$ 일 때, $3a = 6$ 이므로 $a = 2$ 이다. 이때 $a_4 = 2 + 3(7) = 23$ 이다.

a_4 는 11의 배수이므로 (ii)의 경우만 해당된다. 따라서 $a = 10, d = 4$ 이다.

구하는 값은 $a_8 = a + 7d = 10 + 7(4) = 38$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 27

[출제의도] 지수함수 그래프 위의 점에 대하여 대칭이동으로 정의된 점들의 좌표를 구하고, 이를 이용하여 다각형의 넓이를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 $A(a, 2^a), B(b, 2^b)$ 이고, 문제의 조건에 의해 $a < b$ 이다. 점 P는 점 A를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점이므로 $P(2^a, a)$ 이다. 점 Q는 점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $Q(-b, -2^b)$ 이다.

조건 (가)에서 직선 AQ는 y 축에 평행하므로 두 점의 x 좌표가 같다. 따라서 $a = -b$ 이다. $a < b$ 이므로 $a < -a$, 즉 $2a < 0$ 에서 $a < 0$ 이다.

조건 (나)에서 직선 PB의 기울기는 $\frac{2^a}{7}$ 이다. 점 B의 좌표는 $B(-a, 2^{-a})$ 이므로, 직선 PB의 기울기는 $\frac{2^{-a} - a}{-a - 2^a} = \frac{a - 2^{-a}}{a + 2^a} = \frac{2^a}{7}$ 이다. 식을 정리하면 $7(a - 2^{-a}) = 24(a + 2^a)$ 이고, $17a + 24 \cdot 2^a + 7 \cdot 2^{-a} = 0$ 이다. 이 방정식은 $a = -2$ 일 때

$17(-2) + 24(2^{-2}) + 7(2^2) = -34 + 6 + 28 = 0$ 이므로 성립한다. 따라서 $a = -2, b = 2$ 이다.

네 점의 좌표는 각각 $A(-2, \frac{1}{4}), B(2, 4), P(\frac{1}{4}, -2), Q(-2, -4)$ 이다. 사각형 ABPQ의 넓이 S 를 신발끈 공식을 이용하여 구하면,

$$S = \frac{1}{2} |(x_A y_B + x_B y_P + x_P y_Q + x_Q y_A) - (y_A x_B + y_B x_P + y_P x_Q + y_Q x_A)| = \frac{1}{2} |((-2)(4) + (2)(-2) + (\frac{1}{4})(-4) + (-2)(\frac{1}{4})) - ((\frac{1}{4})(2) + (4)(\frac{1}{4}) + (-2)(-2) + (-4)(-2))| = \frac{1}{2} |(-\frac{27}{2}) - (\frac{27}{2})| = \frac{27}{2}$$

이다.
따라서 구하는 값은 $2S = 2 \times \frac{27}{2} = 27$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ②
[출제의도] 지수함수와 삼각함수가 포함된 식의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.
[풀이]
주어진 식은 $x \rightarrow 0$ 일 때 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형이므로, 식을 변형하여 극한값을 구한다. 분자와 분모를 각각 x 로 나누면 다음과 같다.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{4x} - 1}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}}$$

극한의 기본 성질인 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ 과 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ 을 이용할 수 있도록 식을 변형하면,
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot 4}{\frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot 4}{\frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 2$$

따라서 구하는 극한값은 2이다.

24. 정답 및 풀이

정답: ③
[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구하고, 주어진 조건으로 미정계수를 결정할 수 있는가를 평가한다.
[풀이]
주어진 곡선의 식을 매개변수 t 에 대하여 각각 미분하면 $\frac{dx}{dt} = 2t + a$ 이고 $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+1}$ 이다.
따라서 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 는 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{(t+1)(2t+a)}$ 이다.
 $t = 1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{6}$ 이므로, $t = 1$ 을 대입하면 $\frac{1}{(1+1)(2 \cdot 1 + a)} = \frac{1}{2(2+a)} = \frac{1}{6}$ 이다.
 $2(2+a) = 6$ 에서 $2+a = 3$ 이므로, 구하는 상수 a 의 값은 1 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ③
[출제의도] 등차수열의 합을 구하고, 무리식을 포함한 수열의 극한값을 계산하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.
[풀이]
등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6 이고 공차가 8 이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은
$$S_n = \frac{n\{2(6) + (n-1)8\}}{2} = \frac{n(12 + 8n - 8)}{2} = 4n^2 + 2n$$
 이다.
 $S_{n+1} = 4(n+1)^2 + 2(n+1) = 4n^2 + 10n + 6$ 이므로, 주어진 극한 식의 분모를 유리화하면
$$\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = \frac{(4n^2 + 10n + 6) - (4n^2 + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 10n + 6} + \sqrt{4n^2 + 2n}} = \frac{8n + 6}{\sqrt{4n^2 + 10n + 6} + \sqrt{4n^2 + 2n}}$$
 이다.
따라서 주어진 극한 식은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn^q(\sqrt{4n^2 + 10n + 6} + \sqrt{4n^2 + 2n})}{8n + 6} = 10$ 이다.
극한값이 10 으로 수렴하므로 분모와 분자의 최고차항의 차수가 같아야 한다. 분모는 n 에 대한 1차식이므로, 분자의 차수도 1이어야 한다. 분자의 최고차항은 $n^q \cdot n = n^{q+1}$ 꼴이므로 $q + 1 = 1$, 즉 $q = 0$ 이다.
 $q = 0$ 일 때 극한값은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(\sqrt{4n^2 + 10n + 6} + \sqrt{4n^2 + 2n})}{8n + 6} = \frac{p(\sqrt{4} + \sqrt{4})}{8} = \frac{4p}{8} = \frac{p}{2}$ 이다.
 $\frac{p}{2} = 10$ 이므로 $p = 20$ 이다.
따라서 $p + q = 20 + 0 = 20$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ②
[출제의도] 단면의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타내고, 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산함으로써 입체도형의 부피를 구하는 문항이다.
[풀이]
밀면의 구간 $[0, 1]$ 에 속하는 임의의 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $y = x\sqrt{x}e^{x^2/2}$ 인 정사각형이다. 따라서 단면의

넓이 $A(x)$ 는 $A(x) = (x\sqrt{x}e^{x^2/2})^2 = x^3e^{x^2}$ 이다.

입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 x^3e^{x^2}dx$$

이다. $x^2 = t$ 로 치환하면 $2xdx = dt$ 이므로,

$$V = \int_0^1 x^2e^{x^2}(xdx) = \int_0^1 te^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2} \int_0^1 te^t dt$$

이다. 부분적분법을 이용하여

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C$$

이므로, $V = \frac{1}{2}[(t-1)e^t]_0^1 = \frac{1}{2}\{(1-1)e^1 - (0-1)e^0\} = \frac{1}{2}\{0 - (-1)\} = \frac{1}{2}$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 절댓값 기호를 포함하는 삼각함수로 표현된 속도 벡터를 이용하여 점이 움직인 거리를 정적분으로 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

시각 t 에서 점 P의 속력을 $|\vec{v}(t)|$ 라 하면, 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^\pi |\vec{v}(t)|dt = \int_0^\pi \sqrt{(\cos t - |\cos t|)^2 + (2|\sin t|)^2} dt$$

이다. 적분 구간 $[0, \pi]$ 를 $t = \frac{\pi}{2}$ 를 기준으로 나눈다.

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos t \geq 0$, $\sin t \geq 0$ 이므로 속력은 $\sqrt{(\cos t - \cos t)^2 + (2\sin t)^2} = \sqrt{0 + 4\sin^2 t} = 2\sin t$ 이다.

$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ 에서 $\cos t \leq 0$, $\sin t \geq 0$ 이므로 속력은 $\sqrt{(\cos t - (-\cos t))^2 + (2\sin t)^2} = \sqrt{(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2} = \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 2$ 이다.

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2dt$$

이다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t dt = [-2\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(0) - (-2)(1) = 2$$

이고,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2dt = [2t]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2\pi - \pi = \pi$$

이다.

그러므로 점 P가 움직인 총 거리는 $2 + \pi$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 관계식과 삼차함수의 성질을 이용하여 합성함수의 미분계수를 구한다.

[풀이]

문제의 조건에 따라 삼차함수 $f(x)$ 의 식을 구하고, 주어진 관계식을 미분하여 $g'(0)$ 의 값을 찾는다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고, 다음 조건이 주어지 있다.

(가) $f(0) = \ln 2$

(나) 함수 $f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표는 0 이고, 극점의 x 좌표 중 하나는 1 이다.
 (다) $f(1) = -6 + \ln 2$

조건 (나)에서 $f''(0) = 0$ 이므로, $f(x) = ax^3 + cx + d$ ($a > 0$)로 놓을 수 있다.
 조건 (가)에서 $f(0) = d = \ln 2$ 이다.
 $f'(x) = 3ax^2 + c$ 이고, 조건 (나)에서 $f'(1) = 0$ 이므로 $3a + c = 0$, 즉 $c = -3a$ 이다.
 따라서 $f(x) = ax^3 - 3ax + \ln 2$ 이다.
 조건 (다)에서 $f(1) = a - 3a + \ln 2 = -2a + \ln 2$ 이다.
 주어진 값과 비교하면 $-2a + \ln 2 = -6 + \ln 2$ 이므로, $-2a = -6$ 에서 $a = 3$ 을 얻는다.
 $a = 3 > 0$ 이므로 최고차항 계수 조건과도 일치한다. 이로부터 $c = -9$ 이다.
 따라서 $f(x) = 3x^3 - 9x + \ln 2$ 이고, $f'(x) = 9x^2 - 9$ 이다.

한편, $f(x) = \ln(1 + e^{g(x)})$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = \frac{e^{g(x)}}{1 + e^{g(x)}}g'(x)$ 이다.
 $x = 0$ 을 대입하기 위해 $g(0)$ 의 값이 필요하다. $f(0) = \ln(1 + e^{g(0)}) = \ln 2$ 이므로
 $1 + e^{g(0)} = 2$, 즉 $e^{g(0)} = 1$ 이므로 $g(0) = 0$ 이다.
 $x = 0$ 일 때의 미분 관계식은 $f'(0) = \frac{e^{g(0)}}{1 + e^{g(0)}}g'(0) = \frac{1}{1+1}g'(0) = \frac{1}{2}g'(0)$ 이다.
 $f'(x) = 9x^2 - 9$ 에서 $f'(0) = -9$ 이므로, $-9 = \frac{1}{2}g'(0)$ 이다.
 따라서 $g'(0) = -18$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 46
 [출제외도] 무한급수로 정의된 수열의 일반항을 구하고, 이를 이용하여 새로운 수열의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.
 [풀이]
 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_m 은

$$a_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

이다.
 이 무한급수는 망원급수이므로

$$a_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^N \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2m-1}$$

이다.
 구하고자 하는 값은

$$\sum_{k=1}^{15} a_k a_{k+1}$$

이다.
 $a_k a_{k+1} = \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{2(k+1)-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ 이다.
 따라서 주어진 합은 다음과 같이 계산된다.
 $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{31} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{31} = \frac{15}{31}$$

따라서 $\frac{q}{p} = \frac{15}{31}$ 이므로 $p = 31$, $q = 15$ 이다. p 와 q 는 서로소인 자연수이다.
 그러므로 $p + q = 31 + 15 = 46$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 20

[출제의도] 직선과 원의 위치 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 삼각함수로 나타내고, 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원점 O에서 직선 $y = \tan \theta(x - 4)$ 즉, $(\sin \theta)x - (\cos \theta)y - 4\sin \theta = 0$ 에 이르는 거리는 삼각형 OPQ의 높이 h 와 같다.

$h = \frac{|-4\sin \theta|}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = 4\sin \theta$ 이다. 삼각형 OPQ의 밑변인 현 PQ의 길이를 l 이라 하면, $(\frac{l}{2})^2 + h^2 = 2^2$ 이 성립하므로,

$\frac{l^2}{4} + (4\sin \theta)^2 = 4$ 에서 $l^2 = 16 - 64\sin^2 \theta$ 이다. $l = 4\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}$ 이다.

삼각형 OPQ의 넓이 $S(\theta)$ 는 $S(\theta) = \frac{1}{2} \times l \times h = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta} \times 4\sin \theta = 8\sin \theta \sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}$ 이다.

$S'(\theta) = 8\cos \theta \sqrt{1 - 4\sin^2 \theta} + 8\sin \theta \cdot \frac{-8\sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}} = \frac{8\cos \theta(1 - 4\sin^2 \theta) - 32\sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}} = \frac{8\cos \theta(1 - 8\sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}}$ 이다.

$\sin \alpha = \frac{1}{4}$ 일 때, $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\cos \alpha = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다. $S'(\alpha) = \frac{8(\frac{\sqrt{15}}{4})(1 - 8(\frac{1}{16}))}{\sqrt{1 - 4(\frac{1}{16})}} = \frac{2\sqrt{15}(1 - \frac{1}{2})}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{5}$ 이다.

따라서 구하는 값은 $\{S'(\alpha)\}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ 이다.