

MathGenix 2026년 고2 9월 모의고사 대비 시험 05 정답 및 풀이

ID : MG-H2-2609-05-SOL

출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
④	②	①	⑤	④	④	④	③	③	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	④	④	④	③	④	③	②	③	③
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	3	②	6	325	80	78	192	8	9

1. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 거듭제곱근을 유리수 지수로 변환하고 지수법칙을 적용하여 미지수의 값을 구하는 지수방정식을 풀 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식은 $(\sqrt[3]{2} \times 2^{\frac{1}{6}})^k = 4$ 이다. 식의 밑을 2로 통일하여 정리한다.

등식의 좌변은 $(\sqrt[3]{2} \times 2^{\frac{1}{6}})^k = (2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}})^k = (2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}})^k = (2^{\frac{1}{2}})^k = 2^{\frac{k}{2}}$ 이다.

등식의 우변은 $4 = 2^2$ 이므로, 주어진 등식은 $2^{\frac{k}{2}} = 2^2$ 와 같다.

따라서 밑이 같으므로 지수끼리 비교하면 $\frac{k}{2} = 2$ 이므로, 구하는 자연수 k 의 값은 4 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 무리식이 포함된 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 주어진 함수는 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $\infty - \infty$ 꼴의 부정형이므로, 식을 유리화하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 - 2x} - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 - 2x} - 3x)(\sqrt{9x^2 - 2x} + 3x)}{\sqrt{9x^2 - 2x} + 3x}$$

이다. 분자를 정리하면 $(9x^2 - 2x) - (3x)^2 = -2x$ 이므로, 식은

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{9x^2 - 2x} + 3x}$$

이다. 이는 ∞/∞ 꼴의 부정형이므로 분모와 분자를 x 로 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{9 - 2/x} + 3}$$

이다. 따라서 극한값은 $\frac{-2}{\sqrt{9-0}+3} = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3}$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 특수각에 대한 삼각함수의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이] 삼각함수의 성질에 따라 $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ 이고 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ 이다. 먼저 $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$ 이다.

다음으로 $\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 구하는 값은

$$\tan(-\frac{\pi}{4}) + 2\sin(\frac{7\pi}{6}) = -1 + 2 \times (-\frac{1}{2}) = -1 - 1 = -2 \text{ 이다.}$$

4. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 주어진 각의 범위와 삼각함수 사이의 관계식을 이용하여 다른 삼각함수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면 $\frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{2}{1-\sin^2\theta}$ 이다.

삼각함수 항등식 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 을 이용하면 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ 이므로, 주어진 식은 $\frac{2}{\cos^2\theta} = \frac{9}{2}$ 가 된다. 따라서 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$ 이다.

조건에서 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 θ 는 제3사분면의 각이다. 제3사분면에서 $\cos\theta < 0$ 이고 $\sin\theta < 0$ 이므로, $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ 이다.

또한 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 에서 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다.

따라서 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\sqrt{5}/3}{-2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 절댓값 기호를 포함하는 함수의 우극한과 극한값을 계산하여 그 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 분자를 인수분해하면 $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ 이므로, $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{|x-1|}$ 이다. 절댓값의 정의에 따라 x 의 범위를 나누어 함수를 정리한다.

$x > 1$ 일 때, $|x-1| = x-1$ 이므로 $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = x+2$ 이다.

$x < 1$ 일 때, $|x-1| = -(x-1)$ 이므로 $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)} = -(x+2)$ 이다.

주어진 식의 두 극한값을 각각 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2) = 1+2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} -(x+2) = -(-2+2) = 0$$

따라서 두 극한값의 합은 $3+0=3$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계와 각이 속한 사분면의 정보를 이용하여 주어진 삼각함수 식의 값을 구한다.

[풀이] 주어진 식 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 의 양변을 제곱하면 $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$ 입니다. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$ 에서 $2\sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{5}$ 입니다. 구하려는 $\sin\theta - \cos\theta$ 의 값을 제공하면

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ 이므로, $1 - (-\frac{4}{5}) = \frac{9}{5}$ 입니다. 한편, 조건에서 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ 이고, 따라서 $\sin\theta - \cos\theta > 0$ 입니다. 그러므로 $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 입니다.

7. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 로그함수의 그래프와 선분의 중점 및 길이 등 기하학적 조건을 이용하여 로그방정식을 세우고 풀 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 교점의 좌표를 $A(x_1, \log_a x_1)$, $B(x_2, \log_a x_2)$ 라 하자. 선분 AB의 중점이 $M(\frac{5}{4}, 0)$ 이므로, 중점의 좌표 공식에 의해 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{4}$ 이고 $\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} = 0$ 이다. 첫 번째 식에서 $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ 이고, 두 번째 식에서 $\log_a(x_1 x_2) = 0$ 이므로 $x_1 x_2 = 1$ 이다. 따라서 x_1, x_2 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$ 의 두 근이다. $2t^2 - 5t + 2 = 0$ 을 풀면 $(2t - 1)(t - 2) = 0$ 이므로 두 근은 $\frac{1}{2}$ 과 2 이다. 편의상 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ 라 하자.

선분 AB의 길이가 $\frac{5}{2}$ 이므로, 두 점 사이의 거리 공식에 의해 $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (\log_a x_2 - \log_a x_1)^2 = (\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$ 이다. x_1, x_2 값을 대입하면 $(2 - \frac{1}{2})^2 + (\log_a 2 - \log_a \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ 이다.

$(\frac{3}{2})^2 + (\log_a 2 - (-\log_a 2))^2 = \frac{9}{4} + (2\log_a 2)^2 = \frac{25}{4}$ 이다. 따라서 $4(\log_a 2)^2 = \frac{16}{4} = 4$ 이므로 $(\log_a 2)^2 = 1$ 이다. $\log_a 2 = 1$ 또는 $\log_a 2 = -1$ 이다. 문제의 조건에서 $0 < a < 1$ 이고 진수 2 는 1 보다 크므로 $\log_a 2 < 0$ 이다. 따라서 $\log_a 2 = -1$ 이고, 로그의 정의에 의해 $a^{-1} = 2$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각함수의 성질과 관계를 이용하여 삼각방정식의 해를 구하고, 그 해들의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 방정식에서 $\sin(\pi + x) = -\sin x$ 이고 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로,

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

따라서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = -1$ 이다.

$0 \leq x < 2\pi$ 의 범위에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 인 해는 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 이고, $\sin x = -1$ 인 해는 $x = \frac{3\pi}{2}$ 이다.

따라서 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 주어진 두 식을 연립하여 미지수의 값을 구하고, 이를 통해 식의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 두 식은 $\log_2(ab) = 5$ 와 $\log_2 a - \log_2 b = 3$ 이다.

로그의 정의에 의해 $\log_2(ab) = 5$ 에서 $ab = 2^5 = 32$ 이다.

로그의 성질에 의해 $\log_2 a - \log_2 b = \log_2 \frac{a}{b} = 3$ 이고, 로그의 정의에 의해 $\frac{a}{b} = 2^3 = 8$ 이므로 $a = 8b$ 이다.

$a = 8b$ 를 $ab = 32$ 에 대입하면 $(8b)b = 32$, 즉 $8b^2 = 32$ 이므로 $b^2 = 4$ 이다. b 는 양수이므로 $b = 2$ 이고, $a = 8b = 16$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a + 2b = 16 + 2(2) = 20$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 삼각방정식의 근의 개수 조건을 이용하여 미정계수를 찾고, 방정식의 모든 근의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

핵심 조건 정리 → 방정식 $|2\sin(\frac{x}{2}) - k| = 1$ 에서 $2\sin(\frac{x}{2}) - k = 1$ 또는 $2\sin(\frac{x}{2}) - k = -1$ 이다. 즉, $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{k+1}{2}$ 또는 $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{k-1}{2}$ 이다. $t = \frac{x}{2}$ 로 치환하면, 구간 $[0, 4\pi)$ 에서 x 가 변할 때 t 는 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 변한다. 따라서 두 방정식

$\sin t = \frac{k+1}{2}$ 와 $\sin t = \frac{k-1}{2}$ 의 실근의 개수의 합이 3이어야 한다.

필요한 식 전개 $\rightarrow k > 0$ 이므로 $\frac{k+1}{2} > \frac{1}{2}$ 이다. 두 방정식의 근의 개수 합이 3이 되려면, 한 방정식은 1개의 근을, 다른 방정식은 2개의 근을 가져야 한다. 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 방정식 $\sin t = c$ 가 1개의 근을 가지려면 $c = 1$ 또는 $c = -1$ 이어야 하고, 2개의 근을 가지려면 $|c| < 1$ 이어야 한다. $\frac{k+1}{2} > \frac{k-1}{2}$ 이므로, $\frac{k+1}{2} = 1$ 이고 $|\frac{k-1}{2}| < 1$ 인 경우를 확인해야 한다. $\frac{k+1}{2} = 1$ 에서 $k = 1$ 이고, 이 값을 대입하면 $\frac{k-1}{2} = 0$ 이므로 $|\frac{k-1}{2}| < 1$ 이 성립한다. 따라서 조건을 만족하는 양수 k 의 값은 1 이다.

정답 도출 $\rightarrow k = 1$ 일 때, 두 방정식은 $\sin t = 1$ 과 $\sin t = 0$ 이다. 구간 $[0, 2\pi)$ 에서 $\sin t = 1$ 의 해는 $t = \frac{\pi}{2}$ 이고, $\sin t = 0$ 의 해는 $t = 0, \pi$ 이다. 따라서 t 의 값은 $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 이다. $x = 2t$ 이므로, 구하는 x 값들은 $0, \pi, 2\pi$ 이다. 이 세 실근의 합은 $0 + \pi + 2\pi = 3\pi$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 연립부등식을 풀고, 해의 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이] 첫 번째 부등식 $(\log_3 x)^2 \leq \log_3 x^5 - 6$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 치환하면 $t^2 - 5t + 6 \leq 0$ 이다. $(t - 2)(t - 3) \leq 0$ 이므로 $2 \leq t \leq 3$ 이다. 따라서 $2 \leq \log_3 x \leq 3$ 이고, 밑이 1보다 크므로 $3^2 \leq x \leq 3^3$, 즉 $9 \leq x \leq 27$ 이다. 두 번째 부등식 $(\frac{1}{2})^{x-k} \leq (\frac{1}{8})^{x-4}$ 은

$(\frac{1}{2})^{x-k} \leq (\frac{1}{2})^{3x-12}$ 와 같다. 밑이 0과 1 사이이므로 부등호 방향이 바뀌어 $x - k \geq 3x - 12$ 이고, 이를 풀면 $x \leq \frac{12-k}{2}$ 이다.

연립부등식의 해는 $9 \leq x \leq \frac{12-k}{2}$ 이다. 이 범위를 만족시키는 정수 x 가 4개이므로 그 정수들은 9, 10, 11, 12 이다. 따라서 해의 상한은

$12 \leq \frac{12-k}{2} < 13$ 을 만족해야 한다. $24 \leq 12 - k < 26$ 을 풀면 $12 \leq -k < 14$, 즉 $-14 < k \leq -12$ 이다. k 는 정수이므로 $k = -13$ 이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 주어진 조건(최댓값, 최솟값, 주기)을 이용하여 삼각함수의 미정계수를 결정하고, 이를 바탕으로 특정 지점의 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

(가)에서 이차방정식 $t^2 - 8t + 12 = 0$ 을 풀면 $(t - 2)(t - 6) = 0$ 이므로 두 실근은 $t = 2$ 와 $t = 6$ 이다. 함수 $f(x) = a \cos(bx) + c$ 는 $a > 0$ 이므로 최댓값은 $a + c$, 최솟값은 $-a + c$ 이다. 따라서 $a + c = 6$ 이고 $-a + c = 2$ 이다. 두 식을 연립하여 풀면 $2c = 8$ 에서 $c = 4$ 이고, $a = 2$ 이다.

(나)에서 함수 $f(x)$ 의 주기는 π 이고 $b > 0$ 이므로, $\frac{2\pi}{b} = \pi$ 에서 $b = 2$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = 2 \cos(2x) + 4$ 로 결정된다.

구하고자 하는 값은 $f(\frac{\pi}{6})$ 이므로, $f(\frac{\pi}{6}) = 2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{6}) + 4 = 2 \cos(\frac{\pi}{3}) + 4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 1 + 4 = 5$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식과 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 식의 값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건 (가) $b^2 = ac$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면 $2 \log_a b = \log_a a + \log_a c$ 이므로, $2 \log_a b = 1 + \log_a c$ 이다. 여기서 $\log_a b = X$, $\log_a c = Y$ 라 하면 $2X = 1 + Y$ 이다.

조건 (나)에서 $\log_a(bc) + \log_b(ca) = (\log_a b + \log_a c) + (\log_b c + \log_b a) = 5$ 이다. 이 식을 밑을 a 로 변환하여 X, Y 로 나타내면

$X + Y + \frac{\log_a c}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a b} = X + Y + \frac{Y}{X} + \frac{1}{X} = 5$ 이다.

$Y = 2X - 1$ 을 위 식에 대입하면 $X + (2X - 1) + \frac{2X - 1 + 1}{X} = 5$ 이므로 $3X - 1 + \frac{2X}{X} = 5$ 이다. $3X - 1 + 2 = 5$ 에서 $3X = 4$ 이므로 $X = \frac{4}{3}$ 이다. 따라서 $Y = 2(\frac{4}{3}) - 1 = \frac{5}{3}$ 이다.

구하는 값은 $\log_{ab}(c^2)$ 이므로 밑 변환 공식에 따라 $\frac{\log_a(c^2)}{\log_a(ab)} = \frac{2 \log_a c}{\log_a a + \log_a b} = \frac{2Y}{1 + X}$ 이다.

따라서 구하는 값은 $\frac{2 \cdot (5/3)}{1 + 4/3} = \frac{10/3}{7/3} = \frac{10}{7}$ 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 거듭제곱근의 정의에 따라 실수인 거듭제곱근의 개수를 구하고, 주어진 방정식을 만족시키는 자연수의 값을 찾을 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

실수 a 의 k 제곱근 중 실수인 것의 개수는 k 의 홀짝 여부와 a 의 부호에 따라 결정된다. 주어진 방정식 $f(n) + g(n) = 3$ 이 성립하기 위해서는 $(f(n), g(n))$ 이 $(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$ 이어야 한다.

(i) $f(n) = 1, g(n) = 2$ 일 경우

$f(n) = 1$ 이려면 n 이 홀수이거나 $n - 8 = 0$ 이어야 한다.

$g(n) = 2$ 이려면 $n + 1$ 이 짝수이고(즉, n 이 홀수) 밑인 $-n^2 + 11n - 24$ 가 양수여야 한다.

부등식 $-n^2 + 11n - 24 > 0$ 은 $(n - 3)(n - 8) < 0$ 과 같으므로, $3 < n < 8$ 이다.

두 조건을 모두 만족시키는 홀수 n 은 5, 7 이다.

(ii) $f(n) = 2, g(n) = 1$ 일 경우

$f(n) = 2$ 이려면 n 이 짝수이고 밑인 $n - 8$ 이 양수여야 한다. 즉, $n > 8$ 인 짝수이다.

$g(n) = 1$ 이려면 $n + 1$ 이 홀수(즉, n 이 짝수)이거나 밑인 $-n^2 + 11n - 24$ 가 0 이어야 한다.

n 이 짝수라는 조건이 $f(n) = 2$ 의 조건에 이미 포함되어 있으므로, $n > 8$ 인 짝수를 찾으려 한다.

주어진 범위 $3 \leq n \leq 12$ 에서 $n > 8$ 인 짝수 n 은 10, 12 이다.

(i), (ii)에 의해 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값은 5, 7, 10, 12 이다. 따라서 이들의 합은 $5 + 7 + 10 + 12 = 34$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 포물선의 기하학적 성질을 이용하여 수열의 일반항을 구하고, 부분분수분해를 이용하여 수열의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

포물선 $y^2 = x$ 와 직선 $y = \frac{1}{n}x$ 의 교점의 x 좌표는 $(\frac{x}{n})^2 = x$ 에서 $x^2 = n^2x$ 이므로 $x(x - n^2) = 0$ 의 해이다. 원점이 아닌 점 P_n 의 x 좌표는 n^2 이고, y 좌표는 $y = \frac{1}{n}(n^2) = n$ 이므로 $P_n(n^2, n)$ 이다. 포물선 $y^2 = x$ 의 초점 F 의 좌표는 $(\frac{1}{4}, 0)$ 이다.

삼각형 OFP_n 의 넓이 A_n 은 밑변을 OF 로 생각하면 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times n = \frac{n}{8}$ 이다.

따라서 $A_k = \frac{k}{8}$, $A_{k+1} = \frac{k+1}{8}$ 이므로, 일반항은 $\frac{1}{A_k A_{k+1}} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{64}} = \frac{64}{k(k+1)}$ 이다. 부분분수분해를 하면 $\frac{64}{k(k+1)} = 64(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ 이다.

구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{15} 64(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 64[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{15} - \frac{1}{16})] = 64(1 - \frac{1}{16}) = 64 \times \frac{15}{16} = 60$$

이다.

16. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 구간에 따라 다르게 정의된 함수가 포함된 지수방정식의 해를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 방정식은 $f(x)f(x-1) = 27$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 정의가 $x = 1$ 을 기준으로 나뉘므로, 방정식의 해를 구하기 위해 x 의 값과 $x - 1$ 의 값이 1보다 작거나 같은지, 또는 크기에 따라 구간을 나누어 생각해야 한다. 이는 $x = 1$ 과 $x = 2$ 를 기준으로 구간을 나누는 것과 같다.

(i) $x \leq 1$ 일 때:

$x - 1 \leq 0$ 이므로 $f(x) = 3^x$ 이고 $f(x-1) = 3^{x-1}$ 이다.

방정식은 $3^x \cdot 3^{x-1} = 3^{2x-1} = 27 = 3^3$ 이므로, $2x - 1 = 3$ 에서 $x = 2$ 이다.

$x = 2$ 는 $x \leq 1$ 범위에 포함되지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $1 < x \leq 2$ 일 때:

$x > 1$ 이고 $x - 1 \leq 1$ 이므로 $f(x) = 3^{2x-2}$ 이고 $f(x-1) = 3^{x-1}$ 이다.

방정식은 $3^{2x-2} \cdot 3^{x-1} = 3^{3x-3} = 27 = 3^3$ 이므로, $3x - 3 = 3$ 에서 $x = 2$ 이다.

$x = 2$ 는 $1 < x \leq 2$ 범위에 포함되므로 해이다.

(iii) $x > 2$ 일 때:

$x > 1$ 이고 $x - 1 > 1$ 이므로 $f(x) = 3^{2x-2}$ 이고 $f(x-1) = 3^{2(x-1)-2} = 3^{2x-4}$ 이다.

방정식은 $3^{2x-2} \cdot 3^{2x-4} = 3^{4x-6} = 27 = 3^3$ 이므로, $4x - 6 = 3$ 에서 $4x = 9$, 즉 $x = \frac{9}{4}$ 이다.

$x = \frac{9}{4}$ 는 $x > 2$ 범위에 포함되므로 해이다.

(i), (ii), (iii)에서 구한 모든 실근은 2 와 $\frac{9}{4}$ 이다.

따라서 모든 실근의 합은 $2 + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 합의 식을 이용하여 수열의 항 사이 관계식을 구하고, 등차수열의 성질과 결합하여 특정 항의 값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

조건 (나)에서

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = n - n^2$$

라 하자. $n \geq 2$ 일 때 $S_{2n} - S_{2(n-1)}$ 를 계산하면, $(-1)^{2n-1} a_{2n-1} + (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} - a_{2n-1}$ 이다. 또한

$(n - n^2) - \{(n-1) - (n-1)^2\} = (n - n^2) - (n-1 - n^2 + 2n-1) = -2n+2$ 이다. 이 관계식은 $n=1$ 일 때도 성립하므로, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{2n} - a_{2n-1} = -2n+2$ 이다.

구하는 값은 a_8 이므로, 위 식에 $n=4$ 를 대입하면 $a_8 - a_7 = -2(4) + 2 = -6$ 이다.

조건 (가)에서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 5$ 이고 공차가 3 인 등차수열이므로, 일반항은 $a_{2n-1} = 5 + (n-1) \times 3 = 3n+2$ 이다. a_7 의 값은 $n=4$ 일 때이므로 $a_7 = 3(4) + 2 = 14$ 이다.

따라서 $a_8 - 14 = -6$ 이므로 $a_8 = 8$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 로그 함수의 평행이동을 이해하고, 그래프 위의 점들의 좌표와 도형의 넓이 조건을 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 함수 $f(x) = \log_2 x$ 와 $g(x) = \log_2(x-p) + q$ 의 그래프는 $x=4$ 에서 만나므로 교점 C의 좌표는 $(4, \log_2 4) = (4, 2)$ 이다. 점 C는 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(4) = 2$ 에서 $\log_2(4-p) + q = 2$ 이다.

삼각형 ABC의 꼭짓점의 좌표는 $A(2, f(2)) = (2, 1)$, $B(2, g(2)) = (2, \log_2(2-p) + q)$, $C(4, 2)$ 이다. 삼각형 ABC의 밑변 AB는 직선 $x=2$ 위에 있고, 높이는 점 C에서 직선 $x=2$ 까지의 거리인 $4-2=2$ 이다. 따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 2 = |\log_2(2-p) + q - 1|$ 이다. 넓이가 $\log_2 \frac{3}{2}$ 이므로 $|\log_2(2-p) + q - 1| = \log_2 \frac{3}{2}$ 이다. 한편, $h(x) = g(x) - f(x)$ 는 증가함수이고 $h(4) = 0$ 이므로 $h(2) = g(2) - f(2) < 0$ 이다. 따라서 $\log_2(2-p) + q - 1 < 0$ 이므로 $1 - (\log_2(2-p) + q) = \log_2 \frac{3}{2}$ 이다.

$q = 2 - \log_2(4-p)$ 를 넓이 식에 대입하면 $1 - (\log_2(2-p) + 2 - \log_2(4-p)) = \log_2 \frac{3}{2}$ 이다. 식을 정리하면

$-1 + \log_2(4-p) - \log_2(2-p) = \log_2 \frac{3}{2}$, 즉 $\log_2 \left(\frac{4-p}{2-p}\right) = 1 + \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \log_2 3$ 이다. 따라서 $\frac{4-p}{2-p} = 3$ 이므로 $4-p = 6-3p$ 에서 $2p=2$, $p=1$ 이다. $p=1$ 을 대입하면 $q = 2 - \log_2(4-1) = 2 - \log_2 3$ 이다.

구하는 값은 $p \cdot 2^q = 1 \cdot 2^{2-\log_2 3} = 2^2 \cdot 2^{-\log_2 3} = 4 \cdot 2^{\log_2(1/3)} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 점의 대칭이동과 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

점 P 가 y축 위에 있으므로, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 점 A 를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 할 때, 선분 A'B 의 길이와 같다. 점 A($2^a + k, a$) 를 y축에 대하여 대칭이동한 점 A' 의 좌표는 $(-(2^a + k), a)$ 이다. 점 B 의 좌표는 $(2^{a+2} + k, a - 3)$ 이므로, 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이고, 그 값의 제곱은 $(3\sqrt{37})^2 = 333$ 이다.

$$\overline{A'B}^2 = ((2^{a+2} + k) - (-(2^a + k)))^2 + ((a - 3) - a)^2 = (2^{a+2} + 2^a + 2k)^2 + (-3)^2 = 333$$

$$(5 \cdot 2^a + 2k)^2 + 9 = 333, \text{ 즉 } (5 \cdot 2^a + 2k)^2 = 324 = 18^2 \text{ 이다.}$$

$$a, k \text{ 가 양수이므로 } 5 \cdot 2^a + 2k > 0 \text{ 이고, 따라서 } 5 \cdot 2^a + 2k = 18 \text{ 이다. ...①}$$

점 C 는 곡선 $y = \log_2(x - 2k)$ 위에 있고 y좌표가 a 이므로, $a = \log_2(x_C - 2k)$ 에서 $x_C = 2^a + 2k$ 이다. 즉 C($2^a + 2k, a$) 이다.

$$\overline{BC} = \sqrt{13} \text{ 이므로 } \overline{BC}^2 = 13 \text{ 이다.}$$

$$\overline{BC}^2 = ((2^{a+2} + k) - (2^a + 2k))^2 + ((a - 3) - a)^2 = (3 \cdot 2^a - k)^2 + (-3)^2 = 13$$

$$(3 \cdot 2^a - k)^2 + 9 = 13, \text{ 즉 } (3 \cdot 2^a - k)^2 = 4 \text{ 이다. 따라서 } 3 \cdot 2^a - k = 2 \text{ 또는 } 3 \cdot 2^a - k = -2 \text{ 이다.}$$

$$\text{문제의 조건에서 } 3 \cdot 2^a > k \text{ 이므로, } 3 \cdot 2^a - k = 2 \text{ 이다. ...②}$$

①과 ②를 연립하여 풀면 $2^a = 2, k = 4$ 를 얻는다. $2^a = 2$ 에서 $a = 1$ 이다.

$a = 1, k = 4$ 는 모두 양수이고 $3 \cdot 2^1 > 4$ 이므로 모든 조건을 만족시킨다.

따라서 구하는 값은 $a + k = 1 + 4 = 5$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프에서 변수 변환을 통해 숨겨진 대칭성을 파악하고, 이를 직선의 성질과 결합하여 미지수의 값을 구하는 문항을 변형하여 출제한다.

[풀이]

점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_P, y_P), (x_Q, y_Q)$ 라 하자. 두 점은 직선 $y = -x + 2k + 4$ 위의 점이므로 기울기가 -1 인 직선의 성질에 의해 $|x_P - x_Q| \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 에서 $|x_P - x_Q| = 3$ 이다. 편의상 $x_P > x_Q$ 라 하면 $x_P - x_Q = 3$ 이다.

점 P는 함수 $f(x)$ 와 직선의 교점이므로 $y_P = \log_2(x_P - k) + 1$ 이고 $y_P = -x_P + 2k + 4$ 이다. 따라서

$$-x_P + 2k + 4 = \log_2(x_P - k) + 1 \text{ 이다. } X = x_P - k \text{ 로 치환하면 } x_P = X + k \text{ 이므로, } -(X + k) + 2k + 4 - 1 = \log_2 X \text{ 에서 } k + 3 - X = \log_2 X \text{ 이다.}$$

점 Q는 함수 $g(x)$ 와 직선의 교점이므로 $y_Q = 2^{x_Q - 2} + k - 1$ 이고 $y_Q = -x_Q + 2k + 4$ 이다. 따라서 $-x_Q + 2k + 4 = 2^{x_Q - 2} + k - 1$ 이다.

$$Y = x_Q - 2 \text{ 로 치환하면 } x_Q = Y + 2 \text{ 이므로, } -(Y + 2) + 2k + 4 = 2^Y + k - 1 \text{ 에서 } k + 3 - Y = 2^Y \text{ 이다.}$$

두 식 $k + 3 - t = \log_2 t$ 와 $k + 3 - t = 2^t$ 의 해가 각각 X, Y 이고, 함수 $y = \log_2 t$ 와 $y = 2^t$ 는 서로 역함수 관계이며 직선

$y = k + 3 - t$ 는 직선 $y = t$ 에 대해 대칭이므로, 두 교점의 t 좌표의 합은 $X + Y = k + 3$ 이다. $(x_P - k) + (x_Q - 2) = k + 3$ 이므로 $x_P + x_Q = 2k + 5$ 이다.

$x_P - x_Q = 3$ 과 $x_P + x_Q = 2k + 5$ 를 연립하여 풀면 $2x_Q = 2k + 2$ 이므로 $x_Q = k + 1$ 이다. 이 값을 점 Q에 대한 식

$$-x_Q + 2k + 4 = 2^{x_Q - 2} + k - 1 \text{ 에 대입하면, } -(k + 1) + 2k + 4 = 2^{(k+1) - 2} + k - 1 \text{ 이므로 } k + 3 = 2^{k-1} + k - 1 \text{ 이다. 따라서 } 4 = 2^{k-1}$$

$$\text{이고 } 2^2 = 2^{k-1} \text{ 이므로 } k - 1 = 2, \text{ 즉 } k = 3 \text{ 이다.}$$

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] n 을 4로 나눈 나머지에 따라 다르게 정의된 수열의 항을 추론하고, 그 합을 구하는 문제를 해결할 수 있다.

[풀이] $a_{16} = 20$ 이므로 주어진 조건을 이용하여 항의 값을 역순으로 추적한다.

n 이 4의 배수가 아닌 경우 조건 (나)에 의해

$$a_{15} = -a_{16} = -20$$

$$a_{14} = -a_{15} = 20$$

$$a_{13} = -a_{14} = -20$$

$n = 12$ 는 4의 배수이므로 조건 (가)에 의해 $a_{13} = a_{12} + 4$ 이다. 따라서 $-20 = a_{12} + 4$ 에서 $a_{12} = -24$ 이다.

수열의 합을 구하기 위해 4개 항씩 묶은 합의 규칙성을 찾는다.

$n = 4k - 3, 4k - 2, 4k - 1$ 은 4의 배수가 아니므로,

$$a_{4k-2} = -a_{4k-3}, a_{4k-1} = -a_{4k-2} = a_{4k-3}, a_{4k} = -a_{4k-1} = -a_{4k-3} \text{ 이다.}$$

따라서 $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = a_{4k-3} - a_{4k-3} + a_{4k-3} - a_{4k-3} = 0$ 이다.

이를 이용하면

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}) = 0 + 0 + 0 = 0$$

이다.

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{12} a_k + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0 + (-20) + 20 + (-20) = -20$$

22. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 지수법칙과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 지수방정식을 풀고 두 근의 합을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 방정식 $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$ 을 지수법칙을 이용하여 정리하면 $(3^x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3^x + 27 = 0$ 이므로 $(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ 이다.

$t = 3^x$ ($t > 0$)로 치환하면 t 에 대한 이차방정식 $t^2 - 12t + 27 = 0$ 을 얻는다. 이 이차방정식의 두 근은 3^α 와 3^β 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 $3^\alpha \cdot 3^\beta = 27$ 이다. 따라서 $3^{\alpha+\beta} = 3^3$ 이므로 구하는 값은 $\alpha + \beta = 3$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 등차수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 두 항의 비를 구한다.

[풀이]

등차수열 W_{a_nW} 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d \neq 0$)라 하자. 첫째항부터 제13항까지의 합 S_{13} 은 $S_{13} = \frac{13(2a+12d)}{2} = 13(a+6d)$ 이다.

조건에서 $S_{13} = 0$ 이므로 $a+6d=0$ 이고, 이는 $a_7 = 0$ 임을 의미한다. 따라서 $a = -6d$ 이다.

구하고자 하는 값은 $\frac{a_{13}}{a_5} = \frac{a+12d}{a+4d}$ 이므로, $a = -6d$ 를 대입하면 $\frac{-6d+12d}{-6d+4d} = \frac{6d}{-2d} = -3$ 이다. 따라서 정답은 -3이다.

24. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 이차함수와 로그함수의 성질을 이용하여 주어진 범위에서 합성함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

[풀이] 진수 부분을 $t(x) = -x^2 + 2x + 7$ 이라 하면 $t(x) = -(x-1)^2 + 8$ 이다. 정의역 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $t(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 8, $x=-1$ 일 때 최솟값 4 를 갖는다. 따라서 진수의 값의 범위는 $4 \leq t(x) \leq 8$ 이다.

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 는 밑이 1 보다 작으므로 감소함수이다. 따라서 함수 y 는 진수 t 가 최솟값을 가질 때 최댓값을 갖고, 진수 t 가 최댓값을 가질 때 최솟값을 갖는다.

최댓값 $M = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ 이고, 최솟값 $m = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ 이다. 따라서 $Mm = (-2) \times (-3) = 6$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: 325

[출제의도] 삼각형의 넓이, 코사인법칙, 사인법칙을 종합적으로 이용하여 외접원과 관련된 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B = 24$ 이다. 즉, $\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin B = 30 \sin B = 24$ 이므로 $\sin B = \frac{4}{5}$ 이다.

주어진 조건에서 $\angle B > \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos B < 0$ 이다. 따라서 $\cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B} = -\sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = -\frac{3}{5}$ 이다.

코사인법칙에 의해 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2(\overline{AB})(\overline{BC})\cos B$ 이므로, $\overline{AC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)(-\frac{3}{5}) = 36 + 100 + 72 = 208$ 이다.

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R$ 이므로, 양변을 제곱하면 $\frac{\overline{AC}^2}{\sin^2 B} = 4R^2$ 이다.

따라서 $4R^2 = \frac{208}{(\frac{4}{5})^2} = \frac{208}{\frac{16}{25}} = 208 \times \frac{25}{16} = 13 \times 25 = 325$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: 80

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그 값들의 대소를 비교하고, 주어진 조건을 만족시키는 미지수 값을 찾아 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$10 < a < 100$ 에서 각 변에 상용로그를 취하면 $1 < \log a < 2$ 이다. $\log a = x$ 라 하자. ($1 < x < 2$)

집합 B 의 원소는 $2x$, $2-2x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$ 이다. $1 < x < 2$ 에서 각 원소의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

$$2 < 2x < 4$$

$$-2 < 2-2x < 0$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$$

$$1 < \frac{2}{x} < 2$$

따라서 네 값의 대소 관계는 $2-2x < \frac{1}{x} < \frac{2}{x} < 2x$ 이다.

조건 (가) $p < q < r < s$ 와 (나) $A = B$ 에 의하여 각 점의 좌표는 다음과 같다.

$$p = 2-2x, q = \frac{1}{x}, r = \frac{2}{x}, s = 2x$$

주어진 조건 $q+r=2$ 를 이용하여 x 의 값을 구한다.

$$q+r = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x} = 2$$

따라서 $x = \frac{3}{2}$ 이고, 이 값은 $1 < x < 2$ 를 만족시킨다.

구하는 값은 $20(s-p)$ 이다.

$$s-p = 2x - (2-2x) = 4x - 2$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ 을 대입하면 } s-p = 4(\frac{3}{2}) - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 최종 답은 $20(s-p) = 20 \times 4 = 80$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 78

[출제의도] 삼각함수 그래프의 대칭성을 이용하여, 매개변수를 포함하고 절댓값이 있는 삼각방정식의 실근의 합을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

방정식 $|f(x)| = 2$ 는 $f(x) = 2$ 또는 $f(x) = -2$ 와 같으므로, 이를 정리하면 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = \frac{n+2}{4}$ 또는 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = \frac{n-2}{4}$ 이다.

함수 $y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ 의 그래프는 $0 \leq x \leq 6$ 에서 직선 $x = 1, x = 5$ 및 $x = 3$ 에 대하여 대칭이다.

$k \in (0, 1)$ 일 때 방정식 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = k$ 의 근의 합은 $x = 1$ 대칭인 두 근의 합 2와 $x = 5$ 대칭인 두 근의 합 10을 더한 12이다. $k \in (-1, 0)$ 일 때 근의 합은 $x = 3$ 대칭인 두 근의 합 6이다. $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$ 의 근은 $x = 1, 5$ 이므로 합은 6이고, $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ 의 근은 $x = 0, 2, 4, 6$ 이므로 합은 12이다.

$n = 1$: $\sin(\frac{\pi}{2}x) = \frac{3}{4}$ 또는 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = -\frac{1}{4}$ 이므로, $h(1) = 12 + 6 = 18$.

$n = 2$: $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$ 또는 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ 이므로, $h(2) = 6 + 12 = 18$.

$n = 3, 4, 5$: 방정식 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = \frac{n+2}{4}$ 는 실근을 갖지 않는다. $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ 의 값이 각각 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 이므로, $h(3) = h(4) = h(5) = 12$.

$n = 6$: 방정식 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$ 만 실근을 가지므로, $h(6) = 6$.

따라서 구하는 값은

$$\sum_{n=1}^6 h(n) = 18 + 18 + 3 \times 12 + 6 = 36 + 36 + 6 = 78$$

이다.

28. 정답 및 풀이

정답: 192

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 정의와 성질을 복합적으로 이용하여 주어진 조건을 만족하는 수열의 특정 항을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

조건 (나)에서 수열 b_n 이 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로, $\log_4 a_{2(n+1)} - \log_4 a_{2n} = \frac{1}{2}$ 이다. 이 식을 정리하면 $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = 4^{1/2} = 2$ 이므로, 수열 a_{2n} 은 공비가 2인 등비수열이다. 따라서 $a_{2n} = a_2 \cdot 2^{n-1}$ 이다.

조건 (가)에 의해 $n = 1$ 일 때 세 항 a_1, a_2, a_3 은 공비가 r_1 ($r_1 > 0$)인 등비수열을 이룬다. $a_1 = 12$ 이므로 $a_2 = 12r_1$, $a_3 = 12r_1^2$ 이다. 또한 수열 a_{2n} 의 성질에 따라 $a_4 = a_2 \cdot 2^{2-1} = 2a_2 = 24r_1$ 이다.

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12 + 12r_1 + 12r_1^2 + 24r_1 = 132$$

이므로, $12r_1^2 + 36r_1 - 120 = 0$ 이다. 이 이차방정식을 풀면 $r_1^2 + 3r_1 - 10 = 0$, 즉 $(r_1 + 5)(r_1 - 2) = 0$ 이다. $r_1 > 0$ 이므로 $r_1 = 2$ 이다. 따라서 $a_2 = 24$, $a_3 = 48$, $a_4 = 48$ 이다.

a_7 을 구하기 위해 먼저 a_5, a_6 을 구한다. $n = 2$ 일 때 세 항 a_3, a_4, a_5 는 공비가 r_2 인 등비수열을 이루므로, $a_4 = r_2 a_3$ 에서 $48 = r_2 \cdot 48$, 즉 $r_2 = 1$ 이다. 따라서 $a_5 = r_2 a_4 = 48$ 이다. 수열 a_{2n} 의 성질에 따라 $a_6 = a_4 \cdot 2 = 48 \cdot 2 = 96$ 이다. 마지막으로 $n = 3$ 일 때 세 항 a_5, a_6, a_7 은 공비가 r_3 인 등비수열을 이루므로, $a_6 = r_3 a_5$ 에서 $96 = r_3 \cdot 48$, 즉 $r_3 = 2$ 이다. 그러므로 $a_7 = r_3 a_6 = 2 \cdot 96 = 192$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 8

[출제의도] 절댓값을 포함한 삼각함수의 성질과 수열의 등차중항 조건을 이용하여 미정계수를 구한다.

[풀이]

$f(x) = |p \cos x - q|$ 이고 함수의 최솟값이 2이다.

$p \geq q$ 이면 $p \cos x - q = 0$ 인 x 가 존재하여 최솟값이 0이 되므로 $p < q$ 이다.

따라서 최솟값은 $q - p$ 이고

$$q - p = 2$$

, 즉 $q = p + 2$ 이다.

$f(a) = p$ 에 $q = p + 2$ 를 대입하면

$$|p \cos a - (p + 2)| = p \text{ 이다.}$$

그러므로 다음 두 경우를 얻는다.

$$(1) p \cos a - (p + 2) = p$$

$$\cos a = 2 + 2/p \text{ 가 되어 실근이 없다.}$$

$$(2) p \cos a - (p + 2) = -p$$

$$\cos a = 2/p \text{ 이다.}$$

실근이 존재하려면 $p \geq 2$ 이다.

$p = 2$ 이면 $\cos a = 1$ 이다. 양수인 해는 작은 수부터

$2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi$ 의 순서로 이어진다.

따라서 $a_n = 2n\pi$ 이고

$$a_2 = 4\pi, a_5 = 10\pi, a_8 = 16\pi \text{ 이다.}$$

세 항의 공차가 모두 6π 이므로 조건을 만족한다.

$p > 2$ 라 하고 $\cos \alpha = 2/p, 0 < \alpha < \pi/2$ 라 하자.

양수인 해를 작은 수부터 나열하면

$\alpha, 2\pi - \alpha, 2\pi + \alpha, 4\pi - \alpha, 4\pi + \alpha, 6\pi - \alpha, 6\pi + \alpha, 8\pi - \alpha$ 의 순서이다.

a_2, a_5, a_8 이 등차수열이므로

$$2a_5 = a_2 + a_8 \text{ 이다.}$$

$$2(4\pi + \alpha) = (2\pi - \alpha) + (8\pi - \alpha) \text{ 에서}$$

$$\alpha = \pi/2 \text{ 를 얻는다.}$$

그러나 $0 < \alpha < \pi/2$ 에 모순이므로 $p > 2$ 인 경우는 불가능하다.

따라서 $p = 2, q = 4$ 이고

$$pq = 8 \text{ 이다.}$$

30. 정답 및 풀이

정답: 9

[출제의도] 그래프와 직선의 교점 개수로 정의된 함수의 극한을 이용하여 매개변수를 구한다.

[풀이]

$x \geq 0$ 에서 $y = |x^2 - 9|$ 의 그래프는 $(0, 9)$ 와 $(3, 0)$ 을 지난다.

$x < 0$ 에서 $y = (x + a)^2 + b$ 의 꼭짓점은 $(-a, b)$ 이다.

따라서 $g(t)$ 의 값이 바뀔 수 있는 지점은

$$t = b, t = 9, t = a^2 + b \text{ 이다.}$$

조건 (가), (나), (다)를 모두 만족하는 경우는

$$b < 9 < a^2 + b \text{ 이다. 이때 } g(t) \text{ 는 다음과 같다.}$$

$$0 < t < b \text{ 일 때 } g(t) = 2$$

$$t = b \text{ 일 때 } g(t) = 3$$

$$b < t < 9 \text{ 일 때 } g(t) = 4$$

$$9 \leq t < a^2 + b \text{ 일 때 } g(t) = 3$$

$$t \geq a^2 + b \text{ 일 때 } g(t) = 2$$

좌극한과 우극한의 차의 절댓값이 2인 지점은 $t = b$ 이므로 $\alpha = b$ 이다.

$t = 9$ 에서는 좌극한과 우극한의 차가 $4 - 3 = 1$ 이지만 $g(9) - 1 = 3 - 1 = 2$ 이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

$t = a^2 + b$ 에서는 좌극한과 우극한의 차가 $3 - 2 = 1$ 이고 $g(a^2 + b) - 1 = 2 - 1 = 1$ 이므로 조건 (나)를 만족한다. 따라서 $\beta = a^2 + b$ 이다.

$f(4) = |4^2 - 9| = 7$ 이고 $f(4) = \alpha + 2$ 이므로 $\alpha = 5$ 이다. 따라서 $b = 5$ 이다.

$\beta = 5a + 1$ 이므로 $a^2 + b = 5a + 1$ 이다.

$b = 5$ 를 대입하면

$a^2 - 5a + 4 = 0$ 이고, $(a - 1)(a - 4) = 0$ 이다.

$9 < a^2 + b$ 에서 $a > 2$ 이므로 $a = 4$ 이다.

따라서

$$f(-6) = (-6 + 4)^2 + 5 = 9,$$

$$f(3) = |3^2 - 9| = 0 \text{ 이다.}$$

그러므로 $f(-6) + f(3) = 9$ 이다.
