

# MathGenix 2026년 고2 9월 모의고사 대비 시험 04 정답 및 풀이

ID : MG-H2-2609-04-SOL

출제 : MathGenix

## 빠른 정답

|    |    |    |    |     |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| ④  | ③  | ②  | ②  | ④   | ③  | ②  | ⑤  | ③  | ③  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15  | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| ④  | ③  | ③  | ③  | ④   | ③  | ③  | ④  | ②  | ④  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25  | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| ③  | 36 | 10 | 7  | 116 | 1  | 3  | 55 | 62 | 14 |

## 1. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 로그의 정의를 이해하고 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가합니다.

[풀이]

주어진 조건은  $\log_3 a = 4$  입니다. 로그의 정의에 따라  $a = 3^4 = 81$  입니다.

따라서 구하는 값은  $a^{\frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{2}}$  입니다.

$81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$  이므로, 식의 값은 9 입니다.

## 2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 극한과 미분계수의 관계를 이해하여  $\frac{0}{0}$  꼴의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수  $f(x) = 2x^2 - x$  에서  $f(2)$  의 값을 구하면  $f(2) = 2(2^2) - 2 = 8 - 2 = 6$  이다.

주어진 극한 식의 분자를 계산하면  $f(x) - f(2) = (2x^2 - x) - 6 = 2x^2 - x - 6$  이고, 이를 인수분해하면  $(x - 2)(2x + 3)$  이다.

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x+3) = 2(2) + 3 = 7$$

이다.

## 3. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 등차수열의 일반항과 합의 관계를 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

등차수열  $\{a_n\}$  의 공차를  $d$  라 하면 주어진 조건에서 첫째항은  $a_1 = 2$  이다.

일반항과 합의 공식에 따라  $a_6 = a_1 + 5d = 2 + 5d$  이고,  $S_4 = \frac{4(2a_1 + 3d)}{2} = 2(2 \cdot 2 + 3d) = 8 + 6d$  이다.

$a_6 = S_4$  라는 조건으로부터  $2 + 5d = 8 + 6d$  이므로 공차  $d = -6$  이다.

따라서 구하는 값은  $a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4(-6) = -22$  이다.

#### 4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구한다.

[풀이]

이차방정식  $kx^2 - 2x - 1 = 0$  의 두 근이  $\sin \theta$  와  $\cos \theta$  이므로 근과 계수의 관계에 의하여  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{k}$  이고

$\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{k}$  이다.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  이고  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta$  이므로,  $(\frac{2}{k})^2 = 1 + 2(-\frac{1}{k})$  이다. 이 식을 정리하면

$\frac{4}{k^2} = 1 - \frac{2}{k}$  이고, 양변에  $k^2$  을 곱하면  $4 = k^2 - 2k$  이므로  $k^2 - 2k - 4 = 0$  이다. 근의 공식에 의해  $k = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-4)}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$  이다.

주어진 조건에서  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  이므로  $\theta$  는 제4사분면의 각이다. 따라서  $\sin \theta < 0$  이고  $\cos \theta > 0$  이므로, 두 근의 곱인  $\sin \theta \cos \theta$  는 음수이다. 즉,  $-\frac{1}{k} < 0$  이므로  $k > 0$  이어야 한다. 두  $k$  의 값 중  $1 - \sqrt{5} < 0$  이고  $1 + \sqrt{5} > 0$  이므로, 구하는  $k$  의 값은  $1 + \sqrt{5}$  이다.

#### 5. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 다항함수와 조각적으로 정의된 함수의 극한 및 합성함수의 극한을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수  $f(x) = x - 2$  는 연속함수이므로  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) = 2 - 2 = 0$  이다. 합성함수의 극한  $\lim_{x \rightarrow 3-} g(f(x))$  을 구하기 위해

$t = f(x)$  로 치환하면,  $f(x) = x - 2$  는 증가함수이므로  $x \rightarrow 3 -$  일 때  $t$  는  $f(3) = 1$  보다 작은 값을 가지면서 1로 가까워지므로  $t \rightarrow 1 -$  이다. 따라서,  $\lim_{x \rightarrow 3-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t)$  이다.  $t < 1$  일 때  $g(t) = 2t + 3$  이므로

$\lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} (2t + 3) = 2(1) + 3 = 5$  이다. 그러므로 구하는 값은  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3-} g(f(x)) = 0 + 5 = 5$  이다.

#### 6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 부채꼴의 호의 길이와 넓이의 관계를 이용하여 중심각의 크기를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

부채꼴의 반지름의 길이를  $r$  , 호의 길이를  $l$  , 넓이를  $S$  , 중심각의 크기를  $\theta$  라 하자. 문제의 조건에서  $l = 4\pi$  ,  $S = 12\pi$  이다.

부채꼴의 넓이 공식  $S = \frac{1}{2}rl$  을 이용하면  $12\pi = \frac{1}{2} \times r \times 4\pi$  이므로,  $12\pi = 2\pi r$  에서  $r = 6$  을 얻는다.

이제 호의 길이 공식  $l = r\theta$  를 이용하면  $4\pi = 6 \times \theta$  이므로,  $\theta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$  이다.

따라서 구하는 중심각의 크기는  $\frac{2\pi}{3}$  이다.

#### 7. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 부채꼴의 둘레의 길이와 넓이의 관계를 이용하여 중심각의 크기를 구하는 문제이다.

[풀이] 부채꼴의 반지름의 길이를  $r$  , 호의 길이를  $l$  이라 하면 둘레의 길이가 16이므로  $2r + l = 16$  이고, 넓이가 16이므로  $\frac{1}{2}rl = 16$  이다.

첫 번째 식  $l = 16 - 2r$  를 넓이 식에 대입하면  $\frac{1}{2}r(16 - 2r) = 16$  이고, 이를 정리하면  $r^2 - 8r + 16 = 0$  이다.  $(r - 4)^2 = 0$  이므로  $r = 4$  이고, 이때  $l = 16 - 2(4) = 8$  이다. 따라서 중심각의 크기는  $\theta = \frac{l}{r} = \frac{8}{4} = 2$  이다.

## 8. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 범위에서 삼각방정식의 모든 해의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이] 방정식  $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$  에  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  를 대입하면  $2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x - 3 = 0$  이므로  $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$  이다.  $\sin x = t$  로 치환하면  $-1 \leq t \leq 1$  이고, 주어진 방정식은  $2t^2 + 3t + 1 = 0$  이다.  $(2t + 1)(t + 1) = 0$  에서  $t = -\frac{1}{2}$  또는  $t = -1$  이다.  $t = -\frac{1}{2}$  일 때, 즉  $\sin x = -\frac{1}{2}$  일 때  $0 \leq x \leq 2\pi$  에서 해는  $x = \frac{7\pi}{6}$  또는  $x = \frac{11\pi}{6}$  이다.  $t = -1$  일 때, 즉  $\sin x = -1$  일 때  $0 \leq x \leq 2\pi$  에서 해는  $x = \frac{3\pi}{2}$  이다. 따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은  $\frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$  이다.

## 9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 치환을 통해 풀 수 있는 로그 부등식의 해를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

진수 조건에 의해  $x > 0$  이다. 주어진 부등식은 로그의 성질에 의해  $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 < 0$  으로 정리된다.

$\log_2 x = t$  로 치환하면  $t^2 - 3t - 4 < 0$  이고, 인수분해하면  $(t + 1)(t - 4) < 0$  이므로  $-1 < t < 4$  이다.

따라서  $-1 < \log_2 x < 4$  이고, 밑 2 가 1 보다 크므로 부등호의 방향이 유지되어  $2^{-1} < x < 2^4$  즉,  $\frac{1}{2} < x < 16$  이다.

이 범위를 만족시키는 정수  $x$  는 1, 2, 3, ..., 15 이므로, 구하는 합은  $\frac{15(1+15)}{2} = 120$  이다.

## 10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합의 관계를 이용하여 특정 항의 값을 구한다.

[풀이] 등비수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a$  , 공비를  $r$  라 하면 모든 항이 양수이므로  $a > 0$  ,  $r > 0$  이다.

조건  $S_4 = 5S_2$  에서  $r = 1$  이면  $S_4 = 4a$ ,  $S_2 = 2a$  이므로  $4a = 10a$  가 되어  $a = 0$  이 되므로 모순이다. 따라서  $r \neq 1$  이다.

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$  이므로  $\frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 5 \cdot \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1}$  이고, 이를 정리하면  $r^4 - 1 = 5(r^2 - 1)$  이다.

$(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 5(r^2 - 1)$  에서  $r^2 \neq 1$  이므로 양변을  $r^2 - 1$  로 나누면  $r^2 + 1 = 5$  , 즉  $r^2 = 4$  이다.

$r > 0$  이므로  $r = 2$  이다.

조건  $a_2 + a_4 = 30$  에서  $ar + ar^3 = 30$  이므로  $ar(1 + r^2) = 30$  이다.

$a \cdot 2 \cdot (1 + 4) = 30$  ,  $10a = 30$  이므로  $a = 3$  이다.

따라서 구하는 값은  $a_5 = ar^4 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$  이다.

## 11. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 등비수열의 일반항과 성질을 이용하여 특정 항의 값을 구하는 문제를 해결할 수 있다.

[풀이] 등비수열  $a_n$  의 첫째항을  $a$  , 공비를  $r$  이라 하면 문제의 조건에 따라  $a = 4$  이고  $r > 1$  이다. 주어진 조건식  $a_3 + a_4 = 12a_2$  에 등비수열의 일반항  $a_n = ar^{n-1}$  을 대입하면  $ar^2 + ar^3 = 12ar$  이다.  $a = 4$  이고  $r \neq 0$  이므로 양변을  $ar$  로 나누면  $r + r^2 = 12$  , 즉  $r^2 + r - 12 = 0$  이다. 이 이차방정식을 인수분해하면  $(r + 4)(r - 3) = 0$  이므로  $r = -4$  또는  $r = 3$  이다. 조건에서  $r > 1$  이므로 공비는  $r = 3$  이다. 따라서 구하는 값은  $a_5 = ar^4 = 4 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$  이다.

## 12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 대칭적 성질을 이해하고 이를 활용하여 수열의 합의 최댓값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

등차수열  $\{a_n\}$  의 공차가  $d = -6$  으로 음수이므로, 수열의 항은  $n$  이 커짐에 따라 감소한다. 따라서  $a_5 > a_{11}$  이므로  $a_5 \neq a_{11}$  이다. 조건  $|a_5| = |a_{11}|$  을 만족시키기 위해서는  $a_5 = -a_{11}$  이어야 한다.

첫째항을  $a_1$  이라 하면  $a_1 + 4d = -(a_1 + 10d)$  이고, 이 식을 정리하면  $2a_1 = -14d$  , 즉  $a_1 = -7d$  이다. 공차  $d = -6$  을 대입하면  $a_1 = -7(-6) = 42$

를 얻는다. 따라서 일반항은  $a_n = 42 + (n-1)(-6) = -6n + 48$  이다.  $S_n$  은  $a_n \geq 0$  인 모든 항을 더했을 때  
 최댓값을 가지므로, 부등식  $-6n + 48 \geq 0$  을 풀면  $n \leq 8$  이다.  
 $S_n$  의 최댓값은  $S_8$  과 같다. 등차수열의 합 공식을 이용하면  $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(42 + (-6 \cdot 8 + 48)) = 4(42 + 0) = 168$  이다.

### 13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합, 절댓값을 포함한 식의 조건을 종합하여 수열의 특정 항을 구한다.

[풀이] 등비수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a$  , 공비를  $r$  라 하자. 문제의 조건에서  $a$  는 양의 정수이다.

$S_3 = 7a_3$  에서  $a_1 + a_2 + a_3 = 7a_3$  , 즉  $a + ar + ar^2 = 7ar^2$  이다.  $a \neq 0$  이므로 양변을  $a$  로 나누면  $1 + r + r^2 = 7r^2$  이다.

이 식을 정리하면  $6r^2 - r - 1 = 0$  이고, 인수분해하면  $(3r+1)(2r-1) = 0$  이므로  $r = -\frac{1}{3}$  또는  $r = \frac{1}{2}$  이다.

(i)  $r = \frac{1}{2}$  일 때: 첫째항  $a$  가 양수이므로 모든 항이 양수이다.

$$\sum_{k=1}^3 |a_k| = a_1 + a_2 + a_3 = a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a = \frac{7}{4}a = 26$$

에서  $a = \frac{104}{7}$  이므로  $a$  가 정수라는 조건에 맞지 않는다.

(ii)  $r = -\frac{1}{3}$  일 때: 첫째항  $a$  가 양수이므로  $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 > 0$  이다.

$$\sum_{k=1}^3 |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| = a_1 - a_2 + a_3 = a - (-\frac{1}{3}a) + \frac{1}{9}a = \frac{13}{9}a = 26$$

에서  $a = 26 \times \frac{9}{13} = 18$  이므로,  $a$  가 양의 정수라는 조건에 맞는다.

따라서 첫째항은  $a = 18$  이고 공비는  $r = -\frac{1}{3}$  이다.

구하는 값은  $a_5 = ar^4 = 18 \times (-\frac{1}{3})^4 = 18 \times \frac{1}{81} = \frac{2}{9}$  이다.

### 14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해하고, 거듭제곱근 중 실수인 것의 개수를 판별하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수  $f(n)$  은 실수  $-n^2 + 13n - 30$  의  $n$  제곱근 중 실수인 것의 개수이다.  $f(n)$  의 값은  $n$  의 홀짝성과  $-n^2 + 13n - 30$  의 부호에 따라 결정된다.  $A(n) = -n^2 + 13n - 30 = -(n-3)(n-10)$  으로 두자.

주어진 조건은  $f(n) + f(n+2) = 2$  이고,  $n$  과  $n+2$  는 홀짝성이 같다.

(i)  $n$  이 홀수일 때:  $n+2$  도 홀수이므로  $A(n)$  의 부호와 관계없이  $f(n) = 1, f(n+2) = 1$  이다. 따라서  $f(n) + f(n+2) = 1 + 1 = 2$  는 항상 성립한다.  $n$  은  $2 \leq n \leq 11$  범위의 홀수이고,  $n+2$  도 범위 내에 있어야 하므로  $n+2 \leq 11$  , 즉  $n \leq 9$  이다. 따라서  $n$  은 3, 5, 7, 9 이다.

(ii)  $n$  이 짝수일 때:  $n+2$  도 짝수이다.  $f(n) + f(n+2) = 2$  가 성립하는 경우는  $(f(n), f(n+2))$  가  $(0, 2)$  ,  $(2, 0)$  인 경우이다. ( $A(k) = 0$  의 해는  $k = 3, 10$  이므로  $n, n+2$  가 모두 짝수이면서  $A(n), A(n+2)$  가 동시에 0이 될 수 없어  $(1, 1)$  은 불가능하다.)

$A(n) > 0$  인 범위는  $3 < n < 10$  이고,  $A(n) < 0$  인 범위는  $n < 3$  또는  $n > 10$  이다.  $n+2 \leq 11$  이므로  $n \leq 9$  인 짝수  $n = 2, 4, 6, 8$  에 대해 확인한다.

$n = 2$  :  $A(2) < 0, A(4) > 0$  이므로  $f(2) = 0, f(4) = 2$  이다.  $f(2) + f(4) = 2$  이므로 성립한다.

$n = 4$  :  $A(4) > 0, A(6) > 0$  이므로  $f(4) = 2, f(6) = 2$  이다.  $f(4) + f(6) = 4 \neq 2$  .

$n = 6$  :  $A(6) > 0, A(8) > 0$  이므로  $f(6) = 2, f(8) = 2$  이다.  $f(6) + f(8) = 4 \neq 2$  .

$n = 8$  :  $A(8) > 0, A(10) = 0$  이므로  $f(8) = 2, f(10) = 1$  이다.  $f(8) + f(10) = 3 \neq 2$  .

(i), (ii)에 의해 조건을 만족시키는 모든  $n$  의 값은 2, 3, 5, 7, 9 이다. 따라서 이들의 합은  $2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 26$  이다.

## 15. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 원과 직선의 교점, 두 점 사이의 거리, 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 수열의 합을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

원의 방정식  $x^2 + y^2 = 2n^2$  에 직선의 방정식  $y = x + n$  을 대입하여 교점의  $x$  좌표를 구하는 이차방정식을 세운다.  $x^2 + (x + n)^2 = 2n^2$  을 정리하면  $2x^2 + 2nx - n^2 = 0$  이다. 이 이차방정식의 두 근을  $\alpha_n, \beta_n$  이라 하면, 두 교점  $P_n, Q_n$  의 좌표는  $(\alpha_n, \alpha_n + n), (\beta_n, \beta_n + n)$  이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해  $\alpha_n + \beta_n = -n$ ,  $\alpha_n \beta_n = -\frac{n^2}{2}$  이다. 선분  $P_n Q_n$  의 길이  $L_n$  의 제곱은  $L_n^2 = (\beta_n - \alpha_n)^2 + ((\beta_n + n) - (\alpha_n + n))^2 = 2(\beta_n - \alpha_n)^2$  이다.

$(\beta_n - \alpha_n)^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n \beta_n = (-n)^2 - 4(-\frac{n^2}{2}) = n^2 + 2n^2 = 3n^2$  이므로,  $L_n^2 = 2 \cdot 3n^2 = 6n^2$  이다.

따라서 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^5 L_k^2 = \sum_{k=1}^5 6k^2 = 6 \times \frac{5(5+1)(2 \cdot 5 + 1)}{6} = 5 \times 6 \times 11 = 330$$

이다.

## 16. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수 순서쌍의 개수를 구한다.

[풀이]

조건 (가)에 의해  $\log a$  의 소수 부분을  $\alpha$ ,  $\log b$  의 소수 부분을  $\beta$  라 하면  $\alpha + \beta = 1$  이다. (단,  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ) 따라서  $\log a + \log b = \log(ab)$  는 정수이다.  $m = [\log a]$ ,  $n = [\log b]$  라 하면,  $\log(ab) = m + n + 1$  이므로  $ab = 10^{m+n+1}$  이다.

조건 (나)에서  $m, n$  은 음이 아닌 정수이므로,  $m + 2n = 4$  를 만족시키는 순서쌍  $(m, n)$  은  $(4, 0), (2, 1), (0, 2)$  이다.

(i)  $(m, n) = (4, 0)$  일 때

$[\log a] = 4$  이므로  $10^4 \leq a < 10^5$  이고,  $[\log b] = 0$  이므로  $1 \leq b < 10$  이다.  $ab = 10^{4+0+1} = 10^5$  이다.  $b$  는  $10^5$  의 약수이고,  $\log b$  는 정수가 아니므로  $b \neq 1$  이다. 따라서 가능한  $b$  는 2, 4, 5, 8 이다. 이  $b$  값에 대해  $a = 10^5/b$  는 모두  $10^4 \leq a < 10^5$  를 만족시키므로 순서쌍의 개수는 4이다.

(ii)  $(m, n) = (2, 1)$  일 때

$[\log a] = 2$  이므로  $100 \leq a < 1000$  이고,  $[\log b] = 1$  이므로  $10 \leq b < 100$  이다.  $ab = 10^{2+1+1} = 10^4$  이다.  $a$  는  $10^4$  의 약수이며, 조건 (가)에 의해  $a$  는 10 의 거듭제곱이 아니므로  $100 < a < 1000$  이다.  $a$  가 이 범위에 있으면  $b = 10^4/a$  는 자동으로  $10 < b < 100$  을 만족시킨다.  $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$  의 약수 중 100 보다 크고 1000 보다 작은 수는 125, 200, 250, 400, 500, 625 이므로 순서쌍의 개수는 6이다.

(iii)  $(m, n) = (0, 2)$  일 때

$[\log a] = 0$  이므로  $1 \leq a < 10$  이고,  $[\log b] = 2$  이므로  $100 \leq b < 1000$  이다.  $ab = 10^{0+2+1} = 10^3$  이다.  $a$  는 1000 의 약수이고,  $\log a$  는 정수가 아니므로  $a \neq 1$  이다. 따라서 가능한  $a$  는 2, 4, 5, 8 이다. 이  $a$  값에 대해  $b = 1000/a$  는 모두  $100 \leq b < 1000$  을 만족시키므로 순서쌍의 개수는 4이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍  $(a, b)$  의 개수는  $4 + 6 + 4 = 14$  이다.

## 17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 주어진 점화식을 해석하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 수열의 특정 항의 최솟값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

조건 (가)에서  $2\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + \log_3 a_{n+2}$  는 수열  $\{\log_3 a_n\}$  이 등차수열임을 의미합니다. 이 등차수열의 첫째항을  $b$  , 공차를  $d$  라 하고  $b_n = \log_3 a_n$  으로 놓으면,  $b_n = b + (n-1)d$  입니다. 모든 항  $a_n$  이 1보다 크므로  $b_n = \log_3 a_n > \log_3 1 = 0$  입니다. 따라서  $b_1 = b > 0$  이고, 모든 자연수  $n$  에 대하여  $b_n > 0$  이려면  $d \geq 0$  이어야 합니다. 만약  $d = 0$  이라면 조건 (나)에서  $b_2 b_{13} = b_4 b_5$  가 되어  $b^2 = b^2 + 18$  이므로 모순입니다. 따라서  $d > 0$  입니다.

조건 (나)  $(\log_3 a_2)(\log_3 a_{13}) = (\log_3 a_4)(\log_3 a_5) + 18$  을  $b_n$  에 대한 식으로 바꾸면  $b_2 b_{13} = b_4 b_5 + 18$  입니다. 이를  $b$  와  $d$  로 표현하면 다음과 같습니다.

$$(b+d)(b+12d) = (b+3d)(b+4d) + 18$$

$$b^2 + 13bd + 12d^2 = b^2 + 7bd + 12d^2 + 18$$

$$6bd = 18, \text{ 즉 } bd = 3 \text{ 입니다.}$$

$a_4$  의 최솟값을 구하기 위해 먼저  $\log_3 a_4 = b_4$  의 최솟값을 구합니다.  $b_4 = b + 3d$  입니다.  $b > 0, d > 0$  이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 다음이 성립합니다.

$$b + 3d \geq 2\sqrt{b \cdot 3d} = 2\sqrt{3bd}$$

$$bd = 3 \text{ 을 대입하면 } b + 3d \geq 2\sqrt{3 \cdot 3} = 6 \text{ 입니다.}$$

따라서  $b_4 = \log_3 a_4$  의 최솟값은 6입니다. 등호는  $b = 3d$  일 때 성립하며,  $bd = 3$  에서  $b = 3, d = 1$  일 때 실제로 최솟값을 갖습니다.

$\log_3 a_4 \geq 6$  이므로  $a_4 \geq 3^6 = 729$  입니다. 따라서  $a_4$  의 최솟값은 729입니다.

## 18. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 제한된 범위에서 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

함수  $f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{6})$  에서  $a > 0$  이므로,  $f(x)$  가 가질 수 있는 최댓값은  $a$  이다. 주어진 최댓값이 3 이므로  $a = 3$  이다. 이는  $bx + \frac{\pi}{6}$  의 범위 안에  $\sin$  함수의 값이 1 이 되는 지점이 포함되어야 함을 의미한다.

$x$  의 범위가  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  일 때,  $t = bx + \frac{\pi}{6}$  의 범위는  $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{6}$  이다. 이 범위에서  $\sin t$  의 최댓값은 1 이므로  $a = 3$  임이 타당하다.

$f(x)$  의 최솟값은  $-\frac{3}{2}$  이므로,  $a \sin t = 3 \sin t$  의 최솟값이  $-\frac{3}{2}$  이다. 즉, 주어진  $t$  의 범위에서  $\sin t$  의 최솟값은  $-\frac{1}{2}$  이다.

$t$  의 범위의 시작점은  $\frac{\pi}{6}$  이고  $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$  이다.  $t$  가 증가함에 따라  $\sin t$  는  $t = \frac{\pi}{2}$  에서 1 이 된 후 감소한다. 최솟값이  $-\frac{1}{2}$  이 되려면  $t$  의 범위가  $\sin t = -1$  이 되는  $t = \frac{3\pi}{2}$  를 포함해서는 안 된다. 따라서 최솟값은 구간의 끝점인  $t = \frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{6}$  에서 발생해야 한다.

즉,  $\sin(\frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$  이다.  $t \geq \frac{\pi}{6}$  범위에서 이 등식을 만족하는 가장 작은 값은  $t = \frac{7\pi}{6}$  이다.

따라서  $\frac{2\pi b}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$  이다.

$\frac{2\pi b}{3} = \frac{6\pi}{6} = \pi$  이므로  $b = \frac{3}{2}$  이다.

결론적으로, 구하는 값은  $ab = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$  이다.

## 19. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 주기성 및 대칭성을 이용하여 주어진 도형의 넓이와 관련된 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

조건 (가)와 (다)에 따라 두 점 C, D 의  $y$  좌표는 동일하다. 이  $y$  좌표를  $m$  이라 하고, 두 점 C, D 의  $x$  좌표를 각각  $x_C, x_D$  라 하면,  $m = f(x_C) = f(x_D)$  이고 변 CD 의 길이는  $|x_C - x_D| = 2\pi$  이다. 편의상  $x_C > x_D$  라 하면  $x_C = x_D + 2\pi$  이다.

함수  $f(x) = \sqrt{3}\cos(\frac{x}{2}) - 1$  의 주기는  $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$  이다.  $x_C = x_D + 2\pi$  는  $x_C = x_D + (4\pi)/2$  와 같다. 따라서  $f(x_C)$  와  $f(x_D)$  의 관계를 다음과 같이 파악할 수 있다.

$$f(x_D + 2\pi) = \sqrt{3}\cos(\frac{x_D + 2\pi}{2}) - 1 = \sqrt{3}\cos(\frac{x_D}{2} + \pi) - 1 = -\sqrt{3}\cos(\frac{x_D}{2}) - 1$$

한편,  $-f(x_D) - 2 = -(\sqrt{3}\cos(\frac{x_D}{2}) - 1) - 2 = -\sqrt{3}\cos(\frac{x_D}{2}) - 1$  이므로  $f(x + 2\pi) = -f(x) - 2$  의 관계가 성립한다.

$m = f(x_C) = f(x_D + 2\pi) = -f(x_D) - 2 = -m - 2$  이므로  $2m = -2$  , 즉  $m = -1$  이다. 따라서 두 점 C, D 는 직선  $y = -1$  위에 있다.

평행사변형 ABCD 의 밑변을 CD 로 보면 그 길이는  $2\pi$  이다. 조건 (나)에서 두 점 A, B 는 직선  $y = k$  위에 있으므로 평행사변형의 높이는  $|k - (-1)| = |k + 1|$  이다. 조건에서  $k > 0$  이므로 높이는  $k + 1$  이다.

평행사변형 ABCD 의 넓이는 (밑변)  $\times$  (높이)  $= 2\pi(k + 1)$  이다. 넓이가  $4\pi\sqrt{3}$  이므로  $2\pi(k + 1) = 4\pi\sqrt{3}$  이다. 이 식을 풀면  $k + 1 = 2\sqrt{3}$  이므로  $k = 2\sqrt{3} - 1$  이다.

## 20. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 조각적으로 정의된 함수의 연속성과 최대·최소 조건을 이용하여 미정계수를 구하고, 함수의 성질에 대한 명제의 참거짓을 판별한다.

[풀이]

(가) 조건에서 함수  $g(x)$  가  $x = 3k$  에서 연속이므로  $\lim_{x \rightarrow 3k-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3k+} g(x)$  가 성립한다.

$$f(3k) = -f(3k) + a \text{ 에서 } a = 2f(3k) \text{ 이다.}$$

$$f(3k) = (3k - 2k)^2 = k^2 \text{ 이므로 } a = 2k^2 \text{ 이다.}$$

(나) 조건에서 구간  $[2k, 4k]$  의 최솟값을 구한다.

구간  $[2k, 3k]$  에서  $g(x) = f(x) = (x - 2k)^2$  이다. 이 함수의 최솟값은  $x = 2k$  일 때  $g(2k) = 0$  이다.

구간  $(3k, 4k]$  에서  $g(x) = -f(x) + a = -(x - 2k)^2 + 2k^2$  이다. 이 함수는  $x = 2k$  를 축으로 하는 위로 볼록한 포물선이므로,  $x > 2k$  인 구간에서 감소한다. 따라서 구간  $(3k, 4k]$  에서의 최솟값은  $x = 4k$  일 때이다.  $g(4k) = -(4k - 2k)^2 + 2k^2 = -4k^2 + 2k^2 = -2k^2$  이다.

구간  $[2k, 4k]$  에서  $g(x)$  의 최솟값은 0 과  $-2k^2$  중 더 작은 값이므로  $-2k^2$  이다.

주어진 조건에 의해  $-2k^2 = -32$  이므로  $k^2 = 16$  이고,  $k > 0$  이므로  $k = 4$  이다.  $a = 2k^2 = 32$  이다.

<보기> 검증

$$\neg. k + a = 4 + 32 = 36 \text{ (참)}$$

$\neg. k = 4$  이므로  $g(x)$  는  $x = 12$  를 경계로 나뉜다. 구간  $[0, 15]$  에서  $g(x)$  의 최댓값을 구한다.

$x \in [0, 12]$  일 때,  $g(x) = (x - 8)^2$  의 최댓값은  $g(0) = 64$  이다.

$x \in (12, 15]$  일 때,  $g(x) = -(x - 8)^2 + 32$  는 감소하므로 최댓값은  $g(12) = 16$  에 가까워진다.

따라서 구간  $[0, 15]$  에서  $g(x)$  의 최댓값은 64 이다. (거짓)

$\neg. \text{방정식 } g(x) = 0 \text{ 의 실근을 구한다.}$

$x \leq 12$  일 때,  $(x - 8)^2 = 0$  에서  $x = 8$  이다.

$x > 12$  일 때,  $-(x - 8)^2 + 32 = 0$  에서  $(x - 8)^2 = 32$  ,  $x - 8 = \pm 4\sqrt{2}$  이다.  $x = 8 \pm 4\sqrt{2}$  이다.  $x > 12$  를 만족하는 근은  $x = 8 + 4\sqrt{2}$  뿐이다.

모든 실근은 8 과  $8 + 4\sqrt{2}$  이므로, 곱은  $8(8 + 4\sqrt{2}) = 64 + 32\sqrt{2}$  이다. (참)

따라서 옳은 것은  $\neg, \neg$ 이다.

[4점]

## 21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 원에 내접하는 사각형의 기하학적 성질을 추론하고, 이를 삼각형의 넓이 및 내접원 공식과 연계하여 문제를 해결한다.

[풀이]

삼각형 BCD의 외심 O'는 정의에 따라 세 꼭짓점 B, C, D에서 같은 거리에 있으므로  $\overline{O'B} = \overline{O'D}$  이다. 따라서 O'는 선분 BD의 수직이등분선 위에 있다. 문제의 조건에서 외심 O'가 대각선 AC 위에 있으므로, 대각선 AC는 선분 BD의 수직이등분선이다. 이로부터  $\overline{AB} = \overline{AD}$  이고  $\overline{CB} = \overline{CD}$  임을 알 수 있다.

주어진 조건에 따라  $\overline{AD} = 3$ ,  $\overline{CD} = 4$  이다. 사각형 ABCD는 원에 내접하므로 마주 보는 두 각의 크기의 합은  $180^\circ$  이다. 한편,  $\overline{AB} = \overline{AD}$  이고  $\overline{CB} = \overline{CD}$  인 연꼴(kite)의 성질에 의해  $\angle ABC = \angle ADC$  이다. 따라서  $\angle ABC + \angle ADC = 2\angle ABC = 180^\circ$  이므로,  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$  이다. 이로부터 대각선 AC는 사각형 ABCD의 외접원의 지름임을 알 수 있다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리를 이용하면, 지름 AC의 길이는  $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  이다. 원에 내접하는 사각형에 대한 프톨레마이오스 정리에 의해  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$  가 성립하므로,  $5 \cdot \overline{BD} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$  이다. 따라서  $\overline{BD} = \frac{24}{5}$  이다.

이제 삼각형 ABD의 넓이와 둘레를 구하여 내접원의 반지름을 찾는다. 삼각형 ABD는  $\overline{AB} = \overline{AD} = 3$  인 이등변삼각형이다. 대각선 AC와 BD의 교점을 M이라 하면,  $\overline{AM}$  은 삼각형 ABD에서 밑변 BD에 대한 높이이다. 직각삼각형 ABM에서  $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{12}{5}$  이므로,

$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{3^2 - (\frac{12}{5})^2} = \sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5}$  이다. 따라서 삼각형 ABD의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{108}{25}$  이다.

삼각형 ABD의 둘레의 길이는  $3 + 3 + \frac{24}{5} = 6 + \frac{24}{5} = \frac{54}{5}$  이다. 내접원의 반지름을  $r$  이라 하면, 삼각형 넓이 공식  $S = \frac{1}{2}r(\text{둘레})$  에 의해  $\frac{108}{25} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{54}{5}$  이다. 이 식을 정리하면  $r = \frac{108}{25} \times \frac{10}{54} = \frac{4}{5}$  이다. 따라서 삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이는  $\frac{4}{5}$  이다.

## 22. 정답 및 풀이

정답: 36

[출제의도] 밑을 통일하여 지수부등식을 풀고, 조건을 만족시키는 자연수의 합을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 부등식  $(\frac{1}{4})^{x-9} = (2^{-2})^{x-9} = 2^{-2x+18}$  이므로, 주어진 부등식은  $2^{x-6} \leq 2^{-2x+18}$  와 같다.

밑 2 가 1 보다 크므로 지수끼리 비교하면 부등호의 방향이 그대로 유지되어  $x - 6 \leq -2x + 18$  이다.

위 부등식을 정리하면  $3x \leq 24$  이므로  $x \leq 8$  이다. 따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수  $x$  는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 이므로, 그 합은

$\frac{8(8+1)}{2} = 36$  이다.

## 23. 정답 및 풀이

정답: 10

[출제의도] 부채꼴의 중심각, 둘레의 길이와 반지름, 호의 길이 사이의 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

부채꼴의 반지름의 길이를  $r$ , 호의 길이를  $l$  이라 하면, 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{5}$  이므로 호의 길이는  $l = r\theta = r \cdot \frac{\pi}{5}$  이다.

부채꼴의 둘레의 길이는 두 반지름과 호의 길이의 합이므로, 주어진 조건에 따라  $2r + l = 20 + 2\pi$  이다.

$l$  을 소거하여  $r$  에 대한 방정식을 세우면  $2r + r \cdot \frac{\pi}{5} = 20 + 2\pi$  이다. 양변을 정리하면  $r(2 + \frac{\pi}{5}) = 2(10 + \pi)$ , 즉

$r(\frac{10+\pi}{5}) = 2(10 + \pi)$  이다.

따라서  $\frac{r}{5} = 2$  이므로, 구하는 반지름의 길이는  $r = 10$  이다.

## 24. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식과 여러 가지 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 식은  $(\log_2 9 \cdot \log_3 32) - \log_4 64$  이다. 로그의 성질을 이용하여 각 항을 간단히 정리한다.

첫 번째 항은  $\log_2 9 \cdot \log_3 32 = (\log_2 3^2) \cdot (\log_3 2^5) = (2\log_2 3) \cdot (5\log_3 2)$  이다.

밑 변환 공식에 의해  $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$  이므로, 첫 번째 항의 값은  $2 \times 5 \times 1 = 10$  이다.

두 번째 항은  $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$  이다.

따라서 주어진 식의 값은  $10 - 3 = 7$  이다.

## 25. 정답 및 풀이

정답: 116

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 삼각부등식을 풀고, 주어진 범위에서 자연수인 해의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 부등식  $\log_2 (2\sin \frac{\pi}{8}x + 3) < 2$  에서 밑이 1보다 크므로  $2\sin \frac{\pi}{8}x + 3 < 2^2 = 4$  이다. (이때 진수  $2\sin \frac{\pi}{8}x + 3$  는 최솟값이 1이므로 항상 양수이다.)

부등식을 정리하면  $\sin \frac{\pi}{8}x < \frac{1}{2}$  이다.

$t = \frac{\pi}{8}x$  로 놓으면  $0 < x \leq 16$  이므로  $0 < t \leq 2\pi$  이다. 이 범위에서 부등식  $\sin t < \frac{1}{2}$  의 해는  $0 < t < \frac{\pi}{6}$  또는  $\frac{5\pi}{6} < t \leq 2\pi$  이다.

$t = \frac{\pi}{8}x$  를 대입하여  $x$  의 범위를 구하면,  $0 < \frac{\pi}{8}x < \frac{\pi}{6}$  에서  $0 < x < \frac{4}{3}$  이고,  $\frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{8}x \leq 2\pi$  에서  $\frac{20}{3} < x \leq 16$  이다.

위 범위를 만족시키는 자연수  $x$  는 1 과 7, 8, ..., 16 이다.

따라서 구하는 모든 자연수  $x$  의 값의 합은

$$1 + \sum_{k=7}^{16} k = 1 + \frac{10(7+16)}{2} = 1 + 115 = 116$$

이다.

## 26. 정답 및 풀이

정답: 1

[출제의도] 함수의 극한과 미분계수의 관계를 이용하여 다항함수를 추론하고 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

$f(x)$  와  $g(x)$  가 이차함수이므로,  $f(x) = ax^2 + \dots$ ,  $g(x) = bx^2 + \dots$  라 하자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax^2 + \dots}{x^2} = 2a = 1$$

이므로  $a = \frac{1}{2}$  이다.

또한,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+b)x^2 + \dots}{x^2} = a + b = 2$$

이다.

$a = \frac{1}{2}$  이므로  $b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  이다.

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

라 하자.  $h(x)$  는 최고차항의 계수가  $a - b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$  인 이차함수이다.

따라서  $h(x) = -x^2 + cx + d$  로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{x-1} = 2$$

이므로, 분모가 0에 수렴할 때 분자도 0에 수렴해야 한다. 즉,  $h(1) = 0$  이다.

또한, 위 극한값은 미분계수의 정의에 의해  $h'(1) = 2$  이다.

$h(1) = -1 + c + d = 0$  에서  $c + d = 1$  이다.

$h'(x) = -2x + c$  이므로  $h'(1) = -2 + c = 2$  에서  $c = 4$  이다.

$c = 4$  를  $c + d = 1$  에 대입하면  $d = -3$  이다.

따라서  $h(x) = -x^2 + 4x - 3$  이다.

구하는 값은  $f(2) - g(2) = h(2)$  이므로,  $h(2) = -(2^2) + 4(2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$  이다.

## 27. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 삼각함수 그래프의 주기성과 대칭성을 이용하여, 특정 조건을 만족하는 방정식의 모든 해의 합을 구하고 이를 통해 미지정 계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수  $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + b$  의 주기는  $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$  이고, 최댓값은  $a + b$  , 최솟값은  $b - a$  이다. 방정식  $f(x) = n$  ( $n$  은 자연수)의 모든 근의 합을 구해야 한다.  $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = \frac{n-b}{a}$  이다.

정의역  $0 \leq x \leq 12$  는 함수  $f(x)$  의 한 주기에 해당한다. 이 구간에서  $\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = k$  의 해를 살펴보면,

-  $k = 1$  일 때,  $x = 3$  이다. 해의 합은 3이다.

-  $k = -1$  일 때,  $x = 9$  이다. 해의 합은 9이다.

-  $k = 0$  일 때,  $x = 0, 6, 12$  이다. 해의 합은 18이다.

-  $0 < k < 1$  일 때, 해를  $x_1, x_2$  라 하면 대칭성에 의해  $x_1 + x_2 = 6$  이다.

-  $-1 < k < 0$  일 때, 해를  $x_1, x_2$  라 하면 대칭성에 의해  $x_1 + x_2 = 18$  이다.

$a, b$  가 자연수이므로  $a \geq 1, b \geq 1$  이다.  $b$  와  $a$  의 대소 관계에 따라  $f(x)$  의 최솟값의 부호가 달라지므로 경우를 나누어 생각한다.

1.  $b > a$  인 경우:  $f(x)$  의 최솟값  $b - a$  는 자연수이다.  $f(x) = n$  이 되는 모든  $n$  은 양수이다.  $n = a + b, n = b - a, n = b$  일 때의 해들과, 그 사이의 자연수  $n$  값들에 대한 해들의 합을 모두 더하면  $3 + 9 + 18 + 6(a - 1) + 18(a - 1) = 30 + 24(a - 1)$  이다.

$30 + 24(a - 1) = 39$  에서  $24(a - 1) = 9$  이므로, 이를 만족하는 자연수  $a$  는 없다.

2.  $b = a$  인 경우:  $f(x)$  의 최솟값은 0이다.  $n$  은 자연수이므로  $f(x) \geq 1$  인 해만 고려한다.  $n = 2a, n = a$  일 때와 그 사이의 자연수  $n$  에 대한 해들의 합은  $3 + 18 + 6(a - 1) + 18(a - 1) = 21 + 24(a - 1)$  이다.  $21 + 24(a - 1) = 39$  에서  $24(a - 1) = 18$  이므로, 이를 만족하는 자연수  $a$  는 없다.

3.  $b < a$  인 경우:  $f(x)$  의 최솟값  $b - a$  는 0이거나 음수이다.  $f(x) = n$  이 되는 자연수  $n$  은  $1 \leq n \leq a + b$  범위에 있다.

-  $f(x) = a + b$  일 때 ( $\sin = 1$  ):  $x = 3$  . (합: 3)

-  $f(x) = b$  일 때 ( $\sin = 0$  ):  $x = 0, 6, 12$  . (합: 18)

-  $b < n < a + b$  인 자연수  $n$  에 대해  $\frac{n-b}{a}$  는  $(0, 1)$  사이의 값을 가지므로 해의 합은 6이다. 이런  $n$  은  $a - 1$  개 있다.

-  $1 \leq n < b$  인 자연수  $n$  에 대해  $\frac{n-b}{a}$  는  $(-1, 0)$  사이의 값을 가지므로 해의 합은 18이다. 이런  $n$  은  $b - 1$  개 있다.

- 모든 원소의 합은  $3 + 18 + 6(a - 1) + 18(b - 1) = 39$  이다.

-  $21 + 6a - 6 + 18b - 18 = 39 \Rightarrow 6a + 18b - 3 = 39 \Rightarrow 6a + 18b = 42 \Rightarrow a + 3b = 7$ .

-  $a, b$  는  $b < a$  를 만족하는 자연수이므로,  $b = 1$  일 때  $a = 4$  이다. ( $1 < 4$  성립).  $b = 2$  일 때  $a = 1$  이다. ( $2 < 1$  성립 안함).

따라서  $a = 4, b = 1$  이다.

구하는 값은  $a - b = 4 - 1 = 3$  이다.

## 28. 정답 및 풀이

정답: 55

[출제의도] 함수의 극한에 대한 성질과 이차함수의 특성을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 식을 구하고 함수값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

(가)에서  $x \rightarrow 0$  일 때 극한값이 존재하고 그 값이 0 이 아니므로, 분모는 0 에 수렴해야 한다. 즉,  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + f(x)) = f(0) = 0$  이다.  
 $f(x) = kx^2 + mx$  ( $k > 0$ )라 하자.

주어진 식에 대입하면  $\frac{|x| + kx^2 + mx}{2x + kx^2 + mx} = \frac{|x| + mx + kx^2}{(m+2)x + kx^2}$  이다.  $m+2=0$  이면 극한값이 존재하지 않으므로  $m \neq -2$  이다.

분자와 분모를  $x$  로 나누면  $\frac{\frac{|x|}{x} + m + kx}{m+2+kx}$  이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1+m+kx}{m+2+kx} = \frac{m+1}{m+2}$$

이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-1+m+kx}{m+2+kx} = \frac{m-1}{m+2}$$

이다.

두 극한값의 곱이  $-\frac{1}{3}$  이므로  $\frac{m+1}{m+2} \times \frac{m-1}{m+2} = \frac{m^2-1}{(m+2)^2} = -\frac{1}{3}$  이다.

$3(m^2-1) = -(m+2)^2$  에서  $3m^2-3 = -m^2-4m-4$  ,  $4m^2+4m+1=0$  이므로  $(2m+1)^2=0$  에서  $m = -\frac{1}{2}$  이다. 따라서

$f(x) = kx^2 - \frac{1}{2}x$  이다.

(나)에서 극한값이 존재하지 않을 수 있는  $a$  의 값은 분모가 0 이 되는 경우이다.  $|x+1|-2=0$  에서  $|x+1|=2$  이므로  $x+1=2$  또는  $x+1=-2$  이다. 즉  $x=1$  또는  $x=-3$  이다.

따라서  $a$  가 될 수 있는 값은 1 과  $-3$  이다.

$a = -3$  일 때, 분자는  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)f(x-3) = f(-3)f(-6)$  이다.

$f(x) = x(kx - \frac{1}{2})$  이고  $k > 0$  이므로  $f(-3) = -3(-3k - \frac{1}{2}) > 0$  ,  $f(-6) = -6(-6k - \frac{1}{2}) > 0$  이다. 따라서  $f(-3)f(-6) \neq 0$  이므로  $a = -3$  에서 극한값은 존재하지 않는다.

조건에서 극한값이 존재하지 않는  $a$  는 1 개이므로,  $a = 1$  에서는 극한값이 존재해야 한다. 즉,  $a = 1$  에서 분자가 0 이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(x-3) = f(1)f(-2) = 0$  이어야 한다.

$f(1) = k - \frac{1}{2}$  이고  $f(-2) = -2(-2k - \frac{1}{2}) = 2(2k + \frac{1}{2})$  이다.  $k > 0$  이므로  $f(-2) \neq 0$  이다. 따라서  $f(1) = 0$  이어야 하므로  $k - \frac{1}{2} = 0$  에서  $k = \frac{1}{2}$  이다.

그러므로  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$  이다.  $f(11) = \frac{1}{2}(11^2 - 11) = \frac{1}{2}(121 - 11) = \frac{110}{2} = 55$  이다.

따라서  $f(11)$  의 값은 55 이다.

## 29. 정답 및 풀이

정답: 62

[출제의도] 이차방정식의 근과 수열의 항의 관계를 파악하고, 주어진 제약 조건에 따라 수열의 합이 최대가 되는 경우를 추론하여 그 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

(가) 조건에서 이차방정식  $x^2 - 5x - (k-4)(k-9) = 0$  을 인수분해하면  $\{x - (k-4)\}\{x + (k-9)\} = 0$  이 아니므로, 근과 계수의 관계를 이용한다. 두 근의 합은 5 이고 곱은  $-(k-4)(k-9)$  이므로, 두 근은  $k-4$  와  $9-k$  이다. 따라서 모든 자연수  $k$  에 대하여  $a_k$  는  $k-4$  또는  $9-k$  이다.

$$\sum_{n=1}^{12} a_n$$

의 값이 최대가 되려면 각  $n$  에 대하여  $a_n$  은  $n - 4$  와  $9 - n$  중 더 큰 값이어야 한다. 두 값의 대소를 비교하면  $n - 4 > 9 - n$  은  $2n > 13$ , 즉  $n \geq 7$  일 때 성립한다. 따라서 합을 최대로 만드는 수열은  $n \leq 6$  일 때  $a_n = 9 - n$  이고,  $n \geq 7$  일 때  $a_n = n - 4$  이다. 이 경우  $a_n = n - 4$  를 만족시키는  $n$  은 7, 8, 9, 10, 11, 12 의 6개이다.

(나) 조건에서  $a_n = n - 4$  를 만족시키는  $n$  의 개수가 8개여야 하므로, 위에서 구한 6개의  $n$  외에  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  중에서 2개의  $n$  에 대하여  $a_n$  의 값을  $9 - n$  대신  $n - 4$  로 바꾸어야 한다. 이 때 합의 손실이 최소화되어야 하므로, 두 값의 차이인  $(9 - n) - (n - 4) = 13 - 2n$  이 가장 작은 두  $n$  을 선택해야 한다.  $13 - 2n$  은  $n$  이 클수록 작아지므로,  $n = 5$  와  $n = 6$  일 때  $a_n$  의 값을  $n - 4$  로 선택해야 한다.

따라서 최댓값을 갖는 수열  $\{a_n\}$  은 다음과 같다.

$n \in \{1, 2, 3, 4\}$  일 때,  $a_n = 9 - n$

$n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  일 때,  $a_n = n - 4$

최댓값은

$$\sum_{n=1}^4 (9 - n) + \sum_{n=5}^{12} (n - 4)$$

이다.

$$\sum_{n=1}^4 (9 - n) = (9 - 1) + (9 - 2) + (9 - 3) + (9 - 4) = 8 + 7 + 6 + 5 = 26$$

$$\sum_{n=5}^{12} (n - 4) = \sum_{j=1}^8 j = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

따라서 구하는 최댓값은  $26 + 36 = 62$  이다.

### 30. 정답 및 풀이

정답: 14

[출제예도] 함수의 미분가능성 조건과 최솟값 정보를 이용하여 새롭게 정의된 함수의 함숫값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수  $h(x) = \min(f(x), g(x))$  가  $x = 0, 4$  에서만 미분가능하지 않으므로 두 함수  $y = f(x)$  와  $y = g(x)$  의 그래프는  $x = 0, 4$  에서만 만난다.

최고차항의 계수가 음수인 이차함수  $f(x)$  에 대하여  $f(x) - g(x) = px(x - 4)$  (단,  $p < 0$ )로 놓을 수 있다.

이에 따라  $x \in (0, 4)$  에서  $h(x) = g(x)$  이고,  $x \leq 0$  또는  $x \geq 4$  에서  $h(x) = f(x)$  이다.

$x = 4$  에서  $h(x)$  의 좌미분계수는  $g'(4) = 2$  이고 우미분계수는  $f'(4)$  이다.

조건 (나)에 의해  $2^2 + (f'(4))^2 = 40$  에서  $(f'(4))^2 = 36$ , 즉  $f'(4) = \pm 6$  이다.

$f(x) = p(x^2 - 4x) + 2x + k$  에서  $f'(x) = 2px - 4p + 2$  이므로  $f'(4) = 4p + 2$  이다.

$p < 0$  이므로  $f'(4) = 4p + 2 < 2$  이어야 한다. 따라서  $f'(4) = -6$  이다.

$4p + 2 = -6$  에서  $p = -2$  이다.

닫힌구간  $[0, 4]$  에서  $h(x) = g(x) = 2x + k$  이고, 이 구간에서  $g(x)$  는 증가하므로 최솟값은  $h(0) = g(0) = k$  이다.

주어진 최솟값이  $-1$  이므로  $k = -1$  이다.

따라서  $f(x) = -2x(x - 4) + (2x - 1) = -2x^2 + 10x - 1$  이다.

$h(5) = f(5) = -2(5^2) + 10(5) - 1 = -1$  이고,  $h(-1) = f(-1) = -2(-1)^2 + 10(-1) - 1 = -13$  이다.

따라서 구하는 값은  $-h(5) - h(-1) = -(-1) - (-13) = 14$  이다.