

# MathGenix 2026년 고2 9월 모의고사 대비 시험 03 정답 및 풀이

ID : MG-H2-2609-03-SOL

출제 : MathGenix

## 빠른 정답

|    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |
|----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6   | 7  | 8  | 9  | 10 |
| ③  | ④  | ④  | ③  | ③   | ③   | ②  | ③  | ④  | ④  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15  | 16  | 17 | 18 | 19 | 20 |
| ③  | ②  | ③  | ③  | ③   | ③   | ③  | ④  | ③  | ③  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25  | 26  | 27 | 28 | 29 | 30 |
| ③  | 27 | 2  | 15 | 336 | 108 | ⑤  | 6  | 30 | 20 |

## 1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 성질과 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이] 주어진 식의 밑을 3 으로 통일하면  $9 = 3^2$  이므로,  $9^{\frac{1}{2}\log_3 7} = (3^2)^{\frac{1}{2}\log_3 7}$  이다. 지수법칙  $(a^m)^n = a^{mn}$  에 의해

$3^{2 \times \frac{1}{2}\log_3 7} = 3^{\log_3 7}$  이다. 로그의 성질  $a^{\log_a b} = b$  를 이용하면  $3^{\log_3 7} = 7$  이다. 따라서 구하는 식의 값은 7 이다.

## 2. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 무한대 빼기 무한대 꼴의 극한 계산을 통해 미정계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 주어진 식은  $\infty - \infty$  꼴이므로 분자를 유리화하여  $\frac{\infty}{\infty}$  꼴로 변형한다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + ax} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + ax})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 + ax} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{4x^2 + ax} + 2x}$   
분모와 분자를 각각  $x$  로 나누어 극한값을 구하면  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{4 + \frac{a}{x}} + 2} = \frac{a}{\sqrt{4} + 2} = \frac{a}{4}$  이다.

주어진 극한값이 3 이므로  $\frac{a}{4} = 3$  에서  $a = 12$  이다.

## 3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 등비수열의 일반항과 성질을 이용하여 수열의 첫째항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이] 등비수열  $\{a_n\}$  의 첫째항을  $a_1$  , 공비를  $r$  라 하자. 모든 항이 양수이므로  $a_1 > 0$  이고  $r > 0$  이다.

조건  $\frac{a_6}{a_4} = 9$  에서  $\frac{a_1 r^5}{a_1 r^3} = r^2 = 9$  이다.  $r > 0$  이므로  $r = 3$  이다.

조건  $a_3 = 12$  에서  $a_1 r^2 = 12$  이므로,  $a_1 \cdot 3^2 = 9a_1 = 12$  이다.

따라서  $a_1 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$  이다.

#### 4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 항을 첫째항과 공차로 표현하고, 등비중항의 성질을 이용하여 수열의 항 사이의 관계를 파악한다.

[풀이]

등차수열  $W_{a_nW}$ 의 첫째항을  $a_1$ , 공차를  $d$  ( $d \neq 0$ )라 하면  $a_2 = a_1 + d$ ,  $a_3 = a_1 + 2d$ ,  $a_4 = a_1 + 3d$ ,  $a_5 = a_1 + 4d$  이다.

세 항  $a_1, a_2, a_4$ 가 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항의 성질에 따라  $(a_2)^2 = a_1 \times a_4$ 가 성립한다.

$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$ 에서  $a_1^2 + 2a_1d + d^2 = a_1^2 + 3a_1d$ 이므로  $d^2 = a_1d$ 이다.

$d \neq 0$ 이므로 양변을  $d$ 로 나누면  $a_1 = d$ 이다.

따라서 구하는 값은  $\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + 2d} = \frac{d + 4d}{d + 2d} = \frac{5d}{3d} = \frac{5}{3}$ 이다.

#### 5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 구간별로 다르게 정의된 함수의 우극한과 좌극한을 변수 변환을 이용하여 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수  $f(x)$ 의 정의에 따라,  $x$ 가 2보다 큰 값을 가지면서 2에 한없이 가까워질 때  $f(x)$ 는  $2x - 5$ 에 가까워지므로 우극한은 다음과 같습니다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x - 5) = 2(2) - 5 = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(-x)$ 의 값을 구하기 위해  $t = -x$ 로 치환합니다.  $x$ 가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지면,  $t$ 는 -1보다 큰 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워집니다. 즉,  $x \rightarrow 1 -$ 일 때  $t \rightarrow -1 +$ 입니다.  $-1 < t < 2$ 범위에서  $f(t) = t^2 - 3$ 이므로 극한값은 다음과 같습니다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} (t^2 - 3) = (-1)^2 - 3 = -2$$

따라서 구하는 값은 두 극한값의 합이므로,  $-1 + (-2) = -3$ 입니다.

#### 6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그의 밑 변환 공식과 여러 성질을 이용하여 로그 방정식을 풀 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 식의 첫 번째 항을 로그의 밑 변환 공식에 따라 정리하면  $(\log_3 2)(\log_2 \sqrt{k}) = \log_3 \sqrt{k}$ 이다.

이 식을 원래 방정식에 대입하고 로그의 뺄셈 성질을 이용하면  $\log_3 \sqrt{k} - \log_3 \frac{2}{9} = \log_3 \left( \frac{\sqrt{k}}{2/9} \right) = \log_3 \frac{9\sqrt{k}}{2} = 2$ 이다.

로그의 정의에 따라  $\frac{9\sqrt{k}}{2} = 3^2 = 9$ 이므로  $\sqrt{k} = 2$ 이고, 따라서  $k = 4$ 이다.

#### 7. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 시그마의 기본 성질을 이용하여 주어진 조건을 두 개의 미지수에 대한 연립방정식으로 변환하고, 그 해를 이용하여 다른 시그마 식의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = X$$

,

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = Y$$

라 하면 주어진 조건은 시그마의 성질에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$2X - Y = 30 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$X + 3Y = 50 \quad \dots \textcircled{2}$$

①에 3을 곱하면  $6X - 3Y = 90$  이고, 이 식과 ②를 더하면  $7X = 140$  이므로  $X = 20$  이다. 이 값을 ①에 대입하면  $2(20) - Y = 30$  에서  $Y = 10$  을 얻는다.  
따라서 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = X - Y = 20 - 10 = 10$$

이다.

## 8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 수열의 일반항을 구하고, 로그의 성질을 이용하여 망원급수 형태의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

이차방정식  $x^2 - (n+1)x + n = 0$  에서 근과 계수의 관계에 의해  $\alpha_n + \beta_n = n+1$  이고  $\alpha_n \beta_n = n$  이다. 따라서 수열  $\{a_n\}$  의 일반항은

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{n+1}{n} \text{ 이다.}$$

구하고자 하는 값은

$$\sum_{k=2}^{63} \log_2 a_k = \sum_{k=2}^{63} \log_2 \left( \frac{k+1}{k} \right)$$

이다.

로그의 성질에 따라 주어진 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\sum_{k=2}^{63} \log_2 \left( \frac{k+1}{k} \right) = \log_2 \left( \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left( \frac{4}{3} \right) + \dots + \log_2 \left( \frac{64}{63} \right) = \log_2 \left( \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{64}{63} \right)$$

괄호 안의 곱셈은 중간 항들이 소거되어  $\frac{64}{2} = 32$  가 된다.

따라서 구하는 값은  $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$  이다.

## 9. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 제한된 범위에서 지수함수와 이차함수가 합성된 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

[풀이]

함수  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 6x + k}$  에서 밑이  $\frac{1}{2}$  이고  $0 < \frac{1}{2} < 1$  이므로, 이 함수는 지수가 최소일 때 최댓값을 갖고 지수가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

지수  $g(x) = x^2 - 6x + k$  로 놓으면  $g(x) = (x-3)^2 + k-9$  이다. 정의역  $1 \leq x \leq 4$  에서  $g(x)$  는 꼭짓점의 x좌표인  $x=3$  에서 최솟값을 갖고, 꼭짓점에서 가장 먼  $x=1$  에서 최댓값을 갖는다.

$g(x)$  의 최댓값은  $g(1) = (1-3)^2 + k-9 = k-5$  이고,  $g(x)$  의 최솟값은  $g(3) = (3-3)^2 + k-9 = k-9$  이다.

함수  $y$  의 최솟값이 4이므로, 지수가 최대일 때의 함수값이 4이다. 즉,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$  이므로  $k-5 = -2$  에서  $k=3$  이다.

따라서 함수  $y$  의 최댓값은 지수가 최소일 때의 값이므로,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$  이다.

## 10. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 삼각형의 두 변의 길이와 넓이를 이용하여 나머지 한 변의 길이를 코사인법칙을 통해 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

$\angle ABC = \theta$  라 하면, 삼각형 ABC의 넓이는  $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin \theta$  이므로,  $\frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin \theta = 10\sqrt{3}$  이다.

$20\sin \theta = 10\sqrt{3}$  에서  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  이다.  $\theta$  가 둔각( $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ )이므로  $\cos \theta$  는 음수이다.  $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$  이다.

코사인법칙에 의해  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2(\overline{AB})(\overline{BC})\cos\theta$  이므로,  $\overline{AC}^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5)(8)(-\frac{1}{2}) = 25 + 64 + 40 = 129$  이다.  
따라서  $\overline{AC} = \sqrt{129}$  이다.

## 11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그 함수의 점근선, 그래프 위의 점, 역함수의 성질을 이용하여 로그 함수의 식을 구하고 특정 함수값을 계산할 수 있다.

[풀이] 함수  $f(x) = \log_a(x - m) + n$  의 점근선이  $x = 2$  이므로  $m = 2$  이다. 즉,  $f(x) = \log_a(x - 2) + n$  이다.  $y = f(x)$  의 그래프가 점  $(6, -1)$  을 지나므로  $f(6) = \log_a(6 - 2) + n = \log_a(4) + n = -1$  이다. 또한, 역함수  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프가 점  $(0, 18)$  을 지나므로, 원래 함수  $y = f(x)$  의 그래프는 점  $(18, 0)$  을 지난다. 따라서  $f(18) = \log_a(18 - 2) + n = \log_a(16) + n = 0$  이다. 두 식  $\log_a(16) + n = 0$  과  $\log_a(4) + n = -1$  을 연립하여 풀기 위해 두 식을 빼면  $(\log_a(16) + n) - (\log_a(4) + n) = 0 - (-1)$  이므로  $\log_a(16) - \log_a(4) = 1$ , 즉  $\log_a(4) = 1$  이다. 따라서  $a = 4$  이다. 이를  $\log_a(4) + n = -1$  에 대입하면  $1 + n = -1$  이므로  $n = -2$  이다. 그러므로 함수는  $f(x) = \log_4(x - 2) - 2$  이다. 구하는 값은

$$f(34) = \log_4(34 - 2) - 2 = \log_4(32) - 2 = \log_{2^2}(2^5) - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

## 12. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼각함수 그래프의 주기성과 평행이동의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

[풀이] 함수  $f(x) = a\sin(\frac{\pi}{4}x)$  의 주기는  $\frac{2\pi}{\pi/4} = 8$  이다. 점  $P(2, 5)$  가 함수  $y = f(x)$  의 그래프 위의 점이므로  $f(2) = 5$  이다. 즉,

$$a\sin(\frac{\pi}{4} \cdot 2) = a\sin(\frac{\pi}{2}) = a \cdot 1 = 5 \text{ 이므로 } a = 5 \text{ 이다.}$$

점  $P(2, 5)$  를  $x$  축의 방향으로 4만큼,  $y$  축의 방향으로  $b$  만큼 평행이동한 점  $P'$  의 좌표는  $(2 + 4, 5 + b)$ , 즉  $(6, 5 + b)$  이다. 점  $P'$  이 함수  $y = f(x)$  의 그래프 위의 점이므로  $f(6) = 5 + b$  가 성립한다.

$$f(6) = 5\sin(\frac{\pi}{4} \cdot 6) = 5\sin(\frac{3\pi}{2}) = 5 \cdot (-1) = -5 \text{ 이다. 따라서 } 5 + b = -5 \text{ 이므로 } b = -10 \text{ 이다.}$$

구하는 값은  $a + b = 5 + (-10) = -5$  이다.

## 13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 직접 나열하여 규칙성을 찾고, 이를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

주어진 조건에 따라 수열  $\{a_n\}$  의 항을 차례대로 구하면 다음과 같다.

$$a_1 = 24$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 = 12$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 = 6$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 = 3$$

$$a_5 = a_4 + 5 = 8$$

$$a_6 = \frac{1}{2}a_5 = 4$$

$$a_7 = \frac{1}{2}a_6 = 2$$

$$a_8 = \frac{1}{2}a_7 = 1$$

$$a_9 = a_8 + 5 = 6$$

$a_9 = a_3$  이므로, 수열  $\{a_n\}$  은  $n \geq 3$  일 때부터 6, 3, 8, 4, 2, 1 의 6개 수가 이 순서대로 반복된다.

따라서 구하는 합은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + \dots + a_8) + (a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12})$$

$$a_1 + a_2 = 24 + 12 = 36$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 6 + 3 + 8 + 4 + 2 + 1 = 24$$

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 6 + 3 + 8 + 4 = 21$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 36 + 24 + 21 = 81$$

이다.

#### 14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도]  $n$ 의 홀짝 여부와 실수의 부호에 따른 거듭제곱근 중 실수의 개수를 이해하고, 이를 이용하여 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$g(n)$  은 방정식  $x^n = -n^2 + 15n - 44$  의 실근의 개수이다.  $A(n) = -n^2 + 15n - 44$  라 하면  $A(n) = -(n-4)(n-11)$  이다.  $g(n)$  의 값은  $n$  의 홀짝 여부와  $A(n)$  의 부호에 따라 결정된다.

1.  $n$  이 홀수인 경우:

$A(n)$  의 부호와 관계없이  $g(n) = 1$  이다.

$n = 2$  부터 15 까지의 자연수 중 홀수는 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 로 총 7개이므로, 이 경우의 합은  $7 \times 1 = 7$  이다.

2.  $n$  이 짝수인 경우:

$A(n) > 0$  , 즉  $4 < n < 11$  일 때  $g(n) = 2$  이다. 해당하는 짝수는 6, 8, 10 으로 3개이므로 합은  $3 \times 2 = 6$  이다.

$A(n) = 0$  , 즉  $n = 4$  또는  $n = 11$  일 때  $g(n) = 1$  이다. 해당하는 짝수는 4 로 1개이므로 합은  $1 \times 1 = 1$  이다.

$A(n) < 0$  , 즉  $n < 4$  또는  $n > 11$  일 때  $g(n) = 0$  이다. 해당하는 짝수는 2, 12, 14 로 3개이므로 합은  $3 \times 0 = 0$  이다.

따라서  $n$  이 짝수일 때  $g(n)$  의 값들의 합은  $6 + 1 + 0 = 7$  이다.

$n$  이 홀수인 경우와 짝수인 경우의 합을 더하면

$$\sum_{n=2}^{15} g(n) = 7 + 7 = 14$$

이다.

따라서 정답은 14이다.

#### 15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수를 이차함수로 치환하고 로그방정식을 풀어 함수의 최솟값과 관련된 상수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

로그방정식  $\log_4(x-1) + \log_4(x+5) = 2$  의 진수 조건에서  $x-1 > 0$  이고  $x+5 > 0$  이므로  $x > 1$  이다. 방정식을 정리하면

$\log_4((x-1)(x+5)) = 2$  이므로  $(x-1)(x+5) = 4^2 = 16$  이다. 즉,  $x^2 + 4x - 5 = 16$  에서  $x^2 + 4x - 21 = 0$  이고

$(x+7)(x-3) = 0$  이므로  $x > 1$  인 근은  $p = 3$  이다.

함수  $f(x) = 9^{x-a} - 2 \cdot 3^{x-a+1}$  에서  $3^{x-a} = t$  ( $t > 0$ )로 치환하면  $f(x)$  는  $t$  에 대한 함수  $g(t) = t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9$  로 나타낼 수 있다.

$g(t)$  는  $t = 3$  일 때 최솟값  $-9$  를 가지므로  $b = -9$  이다.  $f(x)$  는  $x = p = 3$  에서 최솟값을 가지므로,  $t = 3^{3-a} = 3$  이어야 한다.

따라서  $3 - a = 1$  이므로  $a = 2$  이다.

최종적으로 구하는 값은  $a + b = 2 + (-9) = -7$  이다.

## 16. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수와 관련된 등식과 복잡한 변수 관계식을 연립하여 로그의 값을 구하는 문항을 출제한다.

[풀이]

$9^a = 27^b = c$  에서  $(3^2)^a = (3^3)^b = c$  이므로  $3^{2a} = 3^{3b} = c$  이다. 따라서  $2a = 3b$  이고  $c = 3^{2a}$  이다.

주어진 두 번째 식  $9a^2 + b^2 = 3ab(3a + b - 2)$  를 정리하면  $9a^2 + b^2 = 9a^2b + 3ab^2 - 6ab$  이다.

양변에  $6ab$  를 더하면  $9a^2 + 6ab + b^2 = 9a^2b + 3ab^2$  이 되고,  $(3a + b)^2 = 3ab(3a + b)$  로 인수분해할 수 있다.

$a, b$  는 양수이므로  $3a + b > 0$  이므로 양변을  $3a + b$  로 나누면  $3a + b = 3ab$  이다.

$b = \frac{2}{3}a$  를  $3a + b = 3ab$  에 대입하면  $3a + \frac{2}{3}a = 3a(\frac{2}{3}a)$  가 된다.

정리하면  $\frac{11}{3}a = 2a^2$  이고,  $a > 0$  이므로  $a = \frac{11}{6}$  이다.

구하는 값은  $\log_3 c = \log_3 (3^{2a}) = 2a$  이므로  $2 \times \frac{11}{6} = \frac{11}{3}$  이다.

## 17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 정의된 삼각형의 넓이를 함수로 나타내어 함수의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 함수  $f(x) = x^3 - x$  라 하면  $f'(x) = 3x^2 - 1$  이다. 점 A (1, 0) 에서 곡선에 접하는 직선  $l$  의 기울기는  $f'(1) = 2$  이므로, 접선의 방정식은  $y - 0 = 2(x - 1)$  , 즉  $y = 2x - 2$  이다. 문제의 조건에 따라 두 점 P, Q의 좌표는 각각 P ( $t, t^3 - t$ ) , Q ( $t, 2t - 2$ ) 이다.

삼각형 APQ의 밑변을 선분 PQ라 하면 그 길이는  $|(t^3 - t) - (2t - 2)| = |t^3 - 3t + 2|$  이고, 높이는  $t - 1$  이다. 이때

$t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2(t + 2)$  이고  $t > 1$  에서 항상 양수이므로, 삼각형 APQ의 넓이  $S(t)$  는

$S(t) = \frac{1}{2} \times (t - 1)^2(t + 2) \times (t - 1) = \frac{1}{2}(t + 2)(t - 1)^3$  이다.

따라서 구하는 극한값은  $\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{(t-1)^3} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{2}(t+2)(t-1)^3}{(t-1)^3} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{1}{2}(t+2) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$  이다.

## 18. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 구간이 변하는 함수의 최대·최소 문제에서, 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하여 주어진 조건을 만족하는 변수의 값을 찾을 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수  $f(x)$  는  $x < 1$  에서 증가하고,  $x \geq 1$  에서 감소하며,  $f(1) = 2$  에서 최댓값을 갖는다. 구간  $[a - 1, a + 1]$  에서의 최댓값을  $M$  , 최솟값을  $m$  이라 할 때,  $M - m = 1$  을 만족하는  $a$  의 값을 다음 세 경우로 나누어 구한다.

(i)  $a + 1 < 1$  , 즉  $a < 0$  인 경우

구간  $[a - 1, a + 1]$  에서  $f(x) = 2^{x-1} + 1$  은 증가함수이므로,

$M = f(a + 1) = 2^a + 1$  ,  $m = f(a - 1) = 2^{a-2} + 1$  이다.

$M - m = (2^a + 1) - (2^{a-2} + 1) = 2^a - 2^{a-2} = 2^{a-2}(2^2 - 1) = 3 \cdot 2^{a-2} = 1$  에서

$2^{a-2} = \frac{1}{3}$  ,  $a - 2 = \log_2 (\frac{1}{3}) = -\log_2 3$  이므로  $a = 2 - \log_2 3$  이다.

$1 < \log_2 3 < 2$  이므로  $0 < 2 - \log_2 3 < 1$  이므로,  $a < 0$  조건을 만족하지 않는다.

(ii)  $a - 1 \geq 1$  , 즉  $a \geq 2$  인 경우

구간  $[a - 1, a + 1]$  에서  $f(x) = -\log_2 x + 2$  는 감소함수이므로,

$M = f(a - 1) = -\log_2 (a - 1) + 2$  ,  $m = f(a + 1) = -\log_2 (a + 1) + 2$  이다.

$M - m = (-\log_2 (a - 1) + 2) - (-\log_2 (a + 1) + 2) = \log_2 (a + 1) - \log_2 (a - 1) = \log_2 \frac{a+1}{a-1} = 1$  에서  $\frac{a+1}{a-1} = 2$  ,  $a + 1 = 2a - 2$  이므로  $a = 3$  이다.  $a \geq 2$  조건을 만족하므로, 이는 해이다.

(iii)  $a - 1 < 1 \leq a + 1$  , 즉  $0 < a < 2$  인 경우

(단,  $a = 0$  일 때 구간  $[-1, 1]$  ,  $a = 2$  일 때 구간  $[1, 3]$  이므로  $0 \leq a < 2$  로 생각해도 무방하다.  $a = 2$  는 (ii)에서 확인된다.)

구간  $[a - 1, a + 1]$  은 최댓값을 갖는  $x = 1$  을 포함하므로  $M = f(1) = 2$  이다.

$M - m = 1$

에서  $2 - m = 1$  , 즉  $m = 1$  이다.

최솟값은 구간의 양 끝에서의 함숫값 중 작은 값이므로,  $m = \min \{f(a-1), f(a+1)\} = 1$  이다.

$f(a-1) = 2^{a-2} + 1 = 1$  에서  $2^{a-2} = 0$  이므로 해가 없다.

$f(a+1) = -\log_2(a+1) + 2 = 1$  에서  $\log_2(a+1) = 1$  ,  $a+1 = 2$  이므로  $a = 1$  이다.

$a = 1$  일 때  $m = \min \{f(0), f(2)\} = \min \{\frac{3}{2}, 1\} = 1$  이므로  $a = 1$  은 해이다.

따라서 모든 실수  $a$  의 값은 1, 3 이고, 그 합은  $1 + 3 = 4$  이다.

## 19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열의 성질과 수열의 대칭적 정의를 연계하여 주어진 항의 값을 추론할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건 (가)에서  $a_1, a_3, a_5, a_7$  이 등차수열이므로 등차중항 성질에 의해  $a_1 + a_7 = a_3 + a_5$  이다. 조건 (나)에서  $a_n = 30 - a_{9-n}$  이므로 이를 대입하면  $(30 - a_8) + (30 - a_2) = (30 - a_6) + (30 - a_4)$  이고, 정리하면  $a_2 + a_8 = a_4 + a_6$  이다. 이는  $a_2, a_4, a_6, a_8$  도 등차수열을 이룸을 의미한다.

두 등차수열의 공차는 같다. (가)의 공차를  $d$  라 하면,  $d = a_3 - a_1 = (30 - a_6) - (30 - a_8) = a_8 - a_6$  이므로 짝수 항 수열의 공차도  $d$  이다. 주어진 조건  $a_4 - a_1 = 6$  에  $a_4 = a_2 + d$  를 대입하면  $(a_2 + d) - a_1 = 6$  이다.  $a_1 - a_2 = 3$  에서  $a_2 - a_1 = -3$  이므로,  $-3 + d = 6$  에서  $d = 9$  이다.  $d = 9 > 0$  은 (가)의 조건을 만족한다.

조건 (나)에서  $a_1 + a_8 = 30$  이고  $a_8 = a_2 + 3d$  이므로  $a_1 + a_2 + 3d = 30$  이다.  $d = 9$  를 대입하면  $a_1 + a_2 + 27 = 30$  , 즉  $a_1 + a_2 = 3$  이다.  $a_1 - a_2 = 3$  과  $a_1 + a_2 = 3$  을 연립하여 풀면  $a_1 = 3, a_2 = 0$  이다.

따라서 구하는 값은  $a_2 + a_5$  이고,  $a_5 = a_1 + 2d = 3 + 2(9) = 21$  이므로  $a_2 + a_5 = 0 + 21 = 21$  이다.

## 20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 추론하고, 주어진 조건을 만족시키는 첫째항을 모두 찾아 그 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

조건 (나)에서 모든 자연수  $n$  에 대하여  $a_n \geq a_4$  이므로  $a_4$  는 수열  $\{a_n\}$  의 최솟값이다. 따라서  $a_5 \geq a_4$  이어야 한다. 만약  $a_4$  가 3의 배수이면  $a_5 = \frac{1}{3}a_4$  이므로  $\frac{1}{3}a_4 \geq a_4$  , 즉  $a_4 \leq 0$  이 되어  $a_4$  가 자연수라는 조건에 모순이다. 따라서  $a_4$  는 3의 배수가 아니다. 또한,  $a_3 \geq a_4$  이어야 한다. 만약  $a_3$  가 3의 배수가 아니면  $a_4 = a_3 + 4$  인데,  $a_3 \geq a_3 + 4$  에서  $0 \geq 4$  가 되어 모순이다. 그러므로  $a_3$  는 3의 배수이고  $a_4 = \frac{1}{3}a_3$  이다.  $a_4$  가 3의 배수가 아니므로  $a_3$  는 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다.

$a_3 = 3a_4$  이고,  $a_1 \geq a_4, a_2 \geq a_4$  를 만족해야 한다.  $a_3$  로부터  $a_2$  를,  $a_2$  로부터  $a_1$  을 역으로 추적한다.

(i)  $a_2 = 3a_3 = 9a_4$  인 경우 ( $a_2$  가 3의 배수):  $a_2 \geq a_4$  는 항상 성립한다.

$-a_1 = 3a_2 = 27a_4$  ( $a_1$  이 3의 배수):  $a_1 + a_3 = 30a_4 \leq 40$  에서  $a_4 \leq \frac{4}{3}$  .  $a_4 = 1$  일 때  $a_3 = 3$  이므로 조건을 만족하고,  $a_1 = 27$  이다.

$-a_1 = a_2 - 4 = 9a_4 - 4$  ( $a_1$  이 3의 배수 아님):  $a_1 + a_3 = 12a_4 - 4 \leq 40$  에서  $a_4 \leq \frac{11}{3}$  .  $a_4 \in \{1, 2\}$  일 때  $a_3 \in \{3, 6\}$  이므로 조건을 만족하고,  $a_1 \in \{5, 14\}$  이다.

(ii)  $a_2 = a_3 - 4 = 3a_4 - 4$  인 경우 ( $a_2$  가 3의 배수 아님):  $a_2 \geq a_4$  에서  $3a_4 - 4 \geq a_4$  이므로  $a_4 \geq 2$  이다.

$-a_1 = 3a_2 = 9a_4 - 12$  ( $a_1$  이 3의 배수):  $a_1 + a_3 = 12a_4 - 12 \leq 40$  에서  $a_4 \leq \frac{13}{3}$  .  $a_4 \in \{2, 4\}$  일 때  $a_3 \in \{6, 12\}$  이므로 조건을 만족하고,  $a_1 \in \{6, 24\}$  이다.

$-a_1 = a_2 - 4 = 3a_4 - 8$  ( $a_1$  이 3의 배수 아님):  $a_1$  이 자연수이려면  $a_4 > \frac{8}{3}$  . 또한  $a_1 \geq a_4$  에서  $3a_4 - 8 \geq a_4$  이므로  $a_4 \geq 4$  이다.  $a_1 + a_3 = 6a_4 - 8 \leq 40$  에서  $a_4 \leq 8$  .  $a_4 \in \{4, 5, 7, 8\}$  일 때  $a_3 \in \{12, 15, 21, 24\}$  이므로 조건을 만족하고,  $a_1 \in \{4, 7, 13, 16\}$  이다.

가능한 모든  $a_1$  의 값은  $\{27, 5, 14, 6, 24, 4, 7, 13, 16\}$  이다. 이 값들의 합은  $27 + 5 + 14 + 6 + 24 + 4 + 7 + 13 + 16 = 116$  이다.

## 21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 이차함수와 직선으로 구성된 조각난 함수의 그래프를 이해하고, 실근의 개수 함수의 불연속성에 대한 조건을 이용하여 미정계수를 구하는 문제를 해결할 수 있다.

[풀이] 함수  $y = f(x)$  의 그래프와 직선  $y = t$  의 교점의 개수인  $g(t)$  가 양수  $t$  에서 불연속이 되는 지점은  $y = f(x)$  의 그래프에서  $x = 0$  일 때의 함수값 또는  $x > 0$  에서의 극값에 해당하는  $t$  값이다.  $x \geq 0$  에서  $f(x) = |x^2 - a^2|$  의 그래프는 점  $(0, a^2)$  과 극소점  $(a, 0)$  이 중요한 지점이다.  $x < 0$  에서  $f(x) = x + b$  의 치역은  $(-\infty, b)$  이다.

함수  $g(t)$  가 두 개의 양수  $t$  에서 불연속이 되려면  $b > 0$  이고  $b \neq a^2$  이어야 하며, 불연속점의  $t$  값은  $a^2$  과  $b$  이다. 조건 (가)에 의해 불연속점의 집합은  $\{a^2, b\} = \{k, 3k\}$  이다.

조건 (나)  $\lim_{t \rightarrow 9^-} g(t) - g(9) = 1$  이 성립하려면  $t = 9$  는 불연속점이어야 한다.

두 경우로 나누어  $g(t)$  의 좌극한과 함수값의 차를 분석하면,

1)  $b < a^2$  일 때:

$$g(t) = \begin{cases} 3 & (0 < t < b) \\ 2 & (b \leq t \leq a^2) \\ 1 & (t > a^2) \end{cases}$$

불연속점  $t = b$  에서  $\lim_{t \rightarrow b^-} g(t) - g(b) = 3 - 2 = 1$  이므로 조건 (나)가 성립한다.

불연속점  $t = a^2$  에서  $\lim_{t \rightarrow (a^2)^-} g(t) - g(a^2) = 2 - 2 = 0$  이므로 조건 (나)가 성립하지 않는다.

2)  $a^2 < b$  일 때:

$$g(t) = \begin{cases} 3 & (0 < t \leq a^2) \\ 2 & (a^2 < t < b) \\ 1 & (t \geq b) \end{cases}$$

불연속점  $t = a^2$  에서  $\lim_{t \rightarrow (a^2)^-} g(t) - g(a^2) = 3 - 3 = 0$  이므로 조건 (나)가 성립하지 않는다.

불연속점  $t = b$  에서  $\lim_{t \rightarrow b^-} g(t) - g(b) = 2 - 1 = 1$  이므로 조건 (나)가 성립한다.

따라서 두 경우 모두 조건 (나)를 만족시키려면 반드시  $b = 9$  여야 한다.

$\{a^2, 9\} = \{k, 3k\}$  이므로,

(i)  $k = 9$  이면  $\{a^2, 9\} = \{9, 27\}$  , 즉  $a^2 = 27$  이다.  $a = 3\sqrt{3}$  이므로 순서쌍  $(3\sqrt{3}, 9)$  가 가능하고  $ab = 27\sqrt{3}$  이다.

(ii)  $3k = 9$  이면  $k = 3$  이고  $\{a^2, 9\} = \{3, 9\}$  , 즉  $a^2 = 3$  이다.  $a = \sqrt{3}$  이므로 순서쌍  $(\sqrt{3}, 9)$  가 가능하고  $ab = 9\sqrt{3}$  이다.

가능한  $ab$  의 값은  $27\sqrt{3}$  과  $9\sqrt{3}$  이다.

따라서  $ab$  의 최댓값은  $27\sqrt{3}$  , 최솟값은  $9\sqrt{3}$  이고, 두 값의 곱은  $(27\sqrt{3})(9\sqrt{3}) = 729$  이다.

## 22. 정답 및 풀이

정답: 27

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구하고, 이를 지수 값 계산에 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이] 주어진 조건  $a = \log_3 54 - \log_3 2$  에서 로그의 뺄셈 성질에 의해  $a = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27$  이다. 진수 27 은  $3^3$  이므로, 로그의 정의에 따라  $a = \log_3 3^3 = 3$  이다. 따라서 구하는 값은  $3^a = 3^3 = 27$  이다.

### 23. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 시그마의 성질과 등차수열의 합 공식을 이용하여 미지수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$$\sum_{k=1}^8 (a_k + c_k) = 100$$

과

$$\sum_{k=1}^8 (a_k - 2c_k) = 40$$

의 양변을 각각 빼면,

$$\sum_{k=1}^8 (a_k + c_k) - \sum_{k=1}^8 (a_k - 2c_k) = 100 - 40$$

이다.

시그마의 성질에 의해

$$\sum_{k=1}^8 3c_k = 60$$

이므로

$$3 \sum_{k=1}^8 c_k = 60$$

, 즉

$$\sum_{k=1}^8 c_k = 20$$

이다.

$$\sum_{k=1}^8 a_k + \sum_{k=1}^8 c_k = 100$$

에 위 결과를 대입하면

$$\sum_{k=1}^8 a_k = 80$$

이다.

수열  $\{a_n\}$  은 첫째항이 3 이고 공차를  $d$  라 하는 등차수열이므로, 첫째항부터 제8항까지의 합은  $\frac{8\{2 \times 3 + (8-1)d\}}{2} = 4(6 + 7d)$  이다.

따라서  $4(6 + 7d) = 80$  이므로  $6 + 7d = 20$  ,  $7d = 14$  에서  $d = 2$  이다.

그러므로 수열  $\{a_n\}$  의 공차는 2 이다.

### 24. 정답 및 풀이

정답: 15

[출제의도] 자연수의 성질에 따라 항이 다르게 정의된 수열의 유한합을 시그마의 성질을 이용하여 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

구하고자 하는 합

$$\sum_{k=1}^{15} a_k$$

를  $k$  가 3의 배수인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 계산합니다.

$k = 1$

부터 15 까지의 자연수 중 3의 배수는 3, 6, 9, 12, 15 로 5개이고, 3의 배수가 아닌 수는 10개입니다.

$k$  가 3의 배수인 항들의 합은  $a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 2(3) + 2(6) + 2(9) + 2(12) + 2(15) = 2(3 + 6 + 9 + 12 + 15) = 2 \times 45 = 90$  입니다.

$k$  가 3의 배수가 아닌 항들의 합은

$$\sum_{k=1}^{15} (-k) - \sum_{m=1}^5 (-3m) = -\sum_{k=1}^{15} k + \sum_{m=1}^5 3m$$

입니다. 이는  $-(\frac{15 \times 16}{2}) + 3(\frac{5 \times 6}{2}) = -120 + 45 = -75$  입니다.

따라서 구하는 값은  $90 + (-75) = 15$  입니다.

## 25. 정답 및 풀이

정답: 336

[출제의도] 지수방정식을 치환하여 얻은 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구하는 문항을 해결할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

주어진 방정식  $4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$  은  $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^2 \cdot 2^x + 32 = 0$  , 즉  $(2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 32 = 0$  으로 정리할 수 있다.

$2^x = t$  ( $t > 0$ )로 치환하면 이차방정식  $t^2 - 20t + 32 = 0$  을 얻는다. 이 방정식의 두 근은  $2^\alpha$  와  $2^\beta$  이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 따라 두 근의 합은  $2^\alpha + 2^\beta = 20$  이고, 두 근의 곱은  $2^\alpha \cdot 2^\beta = 32$  이다.

구하고자 하는 값  $4^\alpha + 4^\beta$  은  $(2^\alpha)^2 + (2^\beta)^2$  이므로, 곱셈 공식을 이용하면 다음과 같다.

$$4^\alpha + 4^\beta = (2^\alpha + 2^\beta)^2 - 2(2^\alpha \cdot 2^\beta) = 20^2 - 2(32) = 400 - 64 = 336$$

따라서  $4^\alpha + 4^\beta$  의 값은 336 이다.

## 26. 정답 및 풀이

정답: 108

[출제의도] 등비수열의 일반항과 합의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 수열의 특정 항의 절댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$  , 공비를  $r$  라 하자.

조건  $S_4 + 2S_2 + 24a_1 = 0$  에서  $a > 0$  이므로,  $a(1 + r + r^2 + r^3) + 2a(1 + r) + 24a = 0$  의 양변을  $a$  로 나누면

$$(1 + r)(1 + r^2) + 2(1 + r) + 24 = 0 \text{ 이다.}$$

이 식을 전개하여 정리하면  $r^3 + r^2 + 3r + 27 = 0$  이고, 조립제법을 이용하면  $(r + 3)(r^2 - 2r + 9) = 0$  으로 인수분해된다.

이차방정식  $r^2 - 2r + 9 = 0$  의 판별식은  $D/4 = (-1)^2 - 9 = -8 < 0$  이므로 실근을 갖지 않는다. 따라서 실수  $r = -3$  이다.

다른 조건  $a_1 + a_3 = 40$  에서  $a + ar^2 = a(1 + r^2) = 40$  이다.  $r = -3$  을 대입하면  $a(1 + 9) = 10a = 40$  이므로  $a = 4$  이다.

따라서  $a_4 = ar^3 = 4 \times (-3)^3 = -108$  이므로, 구하는 값은  $|a_4| = |-108| = 108$  이다.

## 27. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 평행사변형의 성질과 사인법칙, 코사인법칙을 종합적으로 활용하여 삼각형의 외접원 반지름을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$  라 하자.  $\cos(\angle DAB) = \frac{3}{5}$  이므로  $\sin(\angle DAB) = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$  이다. 평행사변형 ABCD의 넓이가 12이므로  $absin(\angle DAB) = 12$  에서  $ab \times \frac{4}{5} = 12$  , 즉  $ab = 15$  이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면  $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle DAB)$  이므로  $4^2 = a^2 + b^2 - 2(15)(\frac{3}{5})$  에서  $16 = a^2 + b^2 - 18$  , 즉  $a^2 + b^2 = 34$  이다.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 34 + 2(15) = 64$  이므로  $a + b = 8$  이다.  $a, b$  를 두 근으로 하는 이차방정식은  $t^2 - 8t + 15 = 0$  이고,

$(t - 3)(t - 5) = 0$  이므로 두 변의 길이는 3, 5이다. 조건에서  $\overline{AB} < \overline{AD}$  이므로  $a = 3, b = 5$  이다. 즉,  $\overline{AB} = 3, \overline{BC} = \overline{AD} = 5$  이다.

평행사변형의 성질에 따라  $\angle ABC = 180^\circ - \angle DAB$  이므로  $\cos(\angle ABC) = -\cos(\angle DAB) = -\frac{3}{5}$  이고

$\sin(\angle ABC) = \sin(\angle DAB) = \frac{4}{5}$  이다. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)(-\frac{3}{5}) = 9 + 25 + 18 = 52 \text{ 이므로 } \overline{AC} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ 이다.}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를  $R$  이라 하면 사인법칙에 의해  $\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = 2R$  이다. 따라서  $2R = \frac{2\sqrt{13}}{4/5} = \frac{10\sqrt{13}}{4} = \frac{5\sqrt{13}}{2}$  이므로,  $R = \frac{5\sqrt{13}}{4}$  이다. [4점]

## 28. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 원에 내접하는 사각형의 성질과 삼각형의 코사인법칙, 방멩 정리를 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC의 외접원에서 원주각의 성질에 따라  $\angle BEC = \angle BAC$  이다. 주어진 조건에서  $\cos(\angle BAC) = \frac{3}{5}$  이므로,

$\cos(\angle BEC) = \frac{3}{5}$  이다. 이때 점 D는 선분 AC 위에 있고, 세 점 B, D, E는 한 직선 위에 있으므로  $\angle CED = \angle BEC$  이다. 따라서

$\cos(\angle CED) = \frac{3}{5}$  이다.

삼각형 CDE에서 코사인법칙을 사용하면 선분 CD의 길이를 구할 수 있다.

$$CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2 \cdot CE \cdot DE \cdot \cos(\angle CED)$$

$$CD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 36 + 25 - 36 = 25$$

따라서  $\overline{CD} = 5$  이다.

주어진 조건에서  $\overline{AC} = 10$  이므로,  $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = 10 - 5 = 5$  이다.

두 현 AC, BE가 점 D에서 만나므로 방멩 정리에 의해  $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$  가 성립한다.

$5 \cdot 5 = \overline{BD} \cdot 5$  , 따라서  $\overline{BD} = 5$  이다.

마지막으로 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면 선분 AB의 길이를 구할 수 있다.

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \cos(\angle BAD)$$

$$5^2 = \overline{AB}^2 + 5^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$25 = \overline{AB}^2 + 25 - 6\overline{AB}$$

$$\overline{AB}^2 - 6\overline{AB} = 0, \overline{AB}(\overline{AB} - 6) = 0$$

$\overline{AB}$  는 선분의 길이이므로  $\overline{AB} > 0$  이다. 따라서  $\overline{AB} = 6$  이다.

그러므로 구하는 선분 AB의 길이는 6이다.

## 29. 정답 및 풀이

정답: 30

[출제의도] 삼각함수와 로그함수의 그래프 성질을 이용하여 합성함수에 대한 조건을 만족시키는 미정계수를 찾고, 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결할 수 있다.

[풀이]

(가) 함수  $g(x) = 3\cos(\frac{\pi}{b}x) + 5$  의 그래프는  $y$  축에 대하여 대칭인 함수  $y = 3\cos(\frac{\pi}{b}x)$  의 그래프를  $y$  축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다. 따라서 함수  $y = g(x)$  의 그래프는 직선  $x = nb$  ( $n$  은 정수)에 대하여 대칭이다. 조건 (가)에 의해 직선  $x = 6$  이 대칭축이 되어야 하므로, 6 은  $b$  의 양의 배수이다. 즉,  $b$  는 6 의 양의 약수인 자연수이므로  $b \in \{1, 2, 3, 6\}$  이다.

(나) 방정식  $f(g(x)) = 3$  에서  $\log_2(|g(x) - 6| + a) = 3$  이므로,  $|g(x) - 6| + a = 2^3 = 8$  , 즉  $|g(x) - 6| = 8 - a$  이다. 함수  $g(x)$  의 치역은  $[2, 8]$  이므로,  $g(x) - 6$  의 치역은  $[-4, 2]$  이고,  $|g(x) - 6|$  의 치역은  $[0, 4]$  이다. 따라서  $0 \leq 8 - a \leq 4$  이어야 하므로  $4 \leq a \leq 8$  이다.  $a$  는 자연수이므로  $a \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$  이다. 이제  $b$  의 값에 따라 경우를 나누어 방정식의 근의 개수를 구한다.

1.  $b = 3$  일 때:  $g(x)$  의 주기는 6 이다. 구간  $[0, 12]$  는 두 주기에 해당한다.  $g(x)$  는  $x = 0, 6, 12$  에서 최댓값 8 을 갖고,  $x = 3, 9$  에서 최솟값 2 를 갖는다. 방정식  $|g(x) - 6| = 8 - a$  의 실근의 개수가 4 여야 한다.

-  $a = 8$  이면  $|g(x) - 6| = 0$  , 즉  $g(x) = 6$  이다.  $y = g(x)$  의 그래프와 직선  $y = 6$  은 한 주기당 2개의 교점을 가지므로 구간  $[0, 12]$  에서 4개의 교점을 갖는다. 따라서 순서쌍  $(8, 3)$  은 가능하다.

-  $a = 5$  이면  $|g(x) - 6| = 3$  , 즉  $g(x) = 9$  또는  $g(x) = 3$  이다.  $g(x) = 9$  의 해는 없고,  $g(x) = 3$  은 구간  $[0, 12]$  에서 4개의 해를 갖는다. 따라서 순서쌍  $(5, 3)$  은 가능하다.

- 그 외의  $a$  값에 대해서는 실근의 개수가 4가 아니다.

2.  $b = 6$  일 때:  $g(x)$ 의 주기는 12 이다. 구간  $[0, 12]$ 는 한 주기에 해당한다.  $g(x)$ 는  $x = 0, 12$ 에서 최댓값 8을 갖고,  $x = 6$ 에서 최솟값 2를 갖는다.

-  $a = 7$  이면  $|g(x) - 6| = 1$ , 즉  $g(x) = 7$  또는  $g(x) = 5$  이다.  $g(x) = 7$  과  $g(x) = 5$ 는 각각 구간  $[0, 12]$ 에서 2개의 해를 가지므로 총 4개의 해를 갖는다. 따라서 순서쌍  $(7, 6)$ 은 가능하다.

-  $a = 6$  이면  $|g(x) - 6| = 2$ , 즉  $g(x) = 8$  또는  $g(x) = 4$  이다.  $g(x) = 8$ 은 2개의 해( $x = 0, 12$ )를,  $g(x) = 4$ 는 2개의 해를 가지므로 총 4개의 해를 갖는다. 따라서 순서쌍  $(6, 6)$ 은 가능하다.

-  $b = 1, 2$ 인 경우와 그 외의  $a$  값에 대해서는 실근의 개수가 4가 아니다.

가능한 순서쌍  $(a, b)$ 는  $(8, 3), (5, 3), (7, 6), (6, 6)$ 이다. 각 경우에 대해  $a + 2b$ 의 값을 계산하면,

$(8, 3) \rightarrow 8 + 2(3) = 14$   
 $(5, 3) \rightarrow 5 + 2(3) = 11$   
 $(7, 6) \rightarrow 7 + 2(6) = 19$   
 $(6, 6) \rightarrow 6 + 2(6) = 18$

따라서 최댓값  $M = 19$ , 최솟값  $m = 11$ 이다. 구하는 값은  $M + m = 19 + 11 = 30$ 이다.

### 30. 정답 및 풀이

정답: 20

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하고, 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 추론한다.

[풀이]

조건 (가), (나)에 의해  $a_3 = 0$ 이다.  $a_3$ 은  $a_2$ 의 값으로부터 결정되는데,  $a_2 \geq 0$ 이면  $a_3 = a_2 - d = 0$ 이고  $a_2 < 0$ 이면  $a_3 = ra_2 = 0$ 이다. 이를  $r$ 의 값을 기준으로 경우를 나누어 분석할 수 있다.

1.  $r = 0$ 인 경우:

$a_2$ 의 부호에 관계없이  $a_3 = 0$ 이 될 수 있다. 이 경우 수열의 항을 구해보면  $a_4 = a_3 - d = -d$ 이다.  $d > 0$ 이므로  $a_4 < 0$ 이다.  $a_5 = ra_4 = 0 \cdot (-d) = 0$ 이고,  $a_6 = a_5 - d = -d$ 이다. 조건 (나)에서  $a_6 = -18$ 이므로  $d = 18$ 이다. 이 수열은  $a_3 = 0, a_4 = -18, a_5 = 0, a_6 = -18$  등으로 인접한 항이 같은 경우가 없어 조건 (다)를 만족하므로  $d = 18$ 은 가능한 값이다.

2.  $r \neq 0$ 인 경우:

만약  $a_2 < 0$ 이면  $a_3 = ra_2 = 0$ 에서  $a_2 = 0$ 이 되므로 모순이다. 따라서  $a_2 \geq 0$ 이어야 한다.  $a_3 = a_2 - d = 0$ 에서  $a_2 = d$ 이다.  $d$ 는 양의 정수이므로  $a_2 > 0$ 이다. 이어서 항을 구하면  $a_4 = a_3 - d = -d$ 이고  $a_5 = ra_4 = -rd$ 이다.

(i)  $a_5 \geq 0$ 인 경우:  $d > 0$ 이므로  $r < 0$ 이다.  $a_6 = a_5 - d = -rd - d = -d(r + 1) = -18$ 에서  $d(r + 1) = 18$ 이다.  $d > 0$ 이므로  $r + 1 > 0$ , 즉  $r > -1$ 이어야 한다.  $r < 0$ 인 정수  $r$ 은 존재하지 않으므로 모순이다.

(ii)  $a_5 < 0$ 인 경우:  $d > 0$ 이므로  $r > 0$ 이다.  $a_6 = ra_5 = r(-rd) = -r^2d = -18$ 에서  $r^2d = 18$ 이다.  $r$ 은 양의 정수이므로  $r^2$ 은 18의 제곱수인 약수, 즉  $r^2 = 1$  또는  $r^2 = 9$ 이다.

-  $r^2 = 1$ 이면  $r = 1, d = 18$ 이다. 이때  $a_4 = -18, a_5 = 1 \cdot (-18) = -18$ 이므로  $a_4 = a_5$ 가 되어 조건 (다)에 위배된다.

-  $r^2 = 9$ 이면  $r = 3, d = 2$ 이다. 이때  $a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = -2, a_5 = -6, a_6 = -18$ 이므로 모든 조건을 만족한다. 따라서  $d = 2$ 는 가능한 값이다.

위의 경우들을 종합하면 가능한  $d$ 의 값은 18 과 2 이다. 따라서 모든  $d$ 의 값의 합은  $18 + 2 = 20$ 이다.