

MathGen 2026년 고2 9월 모의고사 대비 시험 02 정답 및 풀이

ID : MG-H2-2609-02-SOL

출제 : Math-Gen

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
①	④	①	⑤	③	⑤	③	④	④	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	③	③	③	③	③	③	③	③
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	4	15	1	18	30	112	③	60	8

1. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 거듭제곱근의 성질, 지수 법칙, 로그의 정의를 결합하여 식의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

주어진 식의 진수 부분을 지수 법칙을 이용하여 먼저 간단히 정리한다.

밑을 5로 통일하여 진수를 계산하면 다음과 같다.

$$\sqrt[3]{25^2 \times 5^{-\frac{1}{3}}} = ((5^2)^2)^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} = (5^4)^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$$

따라서 주어진 식의 값은 $\log_5 5 = 1$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 함수의 극한의 대소 관계(조임 정리)를 이용하여 주어진 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 부등식은 모든 양수 x 에 대하여 성립한다. 함수의 극한의 대소 관계(조임 정리)를 이용하기 위해 부등식의 각 변에 $x \rightarrow \infty$ 일 때의 극한을 취한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{4}{1} = 4$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 특수각에 대한 삼각함수 값을 포함한 식을 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

핵심 조건 정리 → 필요한 식 전개 → 정답 도출의 세 단계로 작성하라.

주어진 식의 각 항을 삼각함수의 성질을 이용하여 변형한다. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ 이다.

또한 코사인 함수는 우함수($\cos(-\theta) = \cos \theta$)이므로, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 구하는 값은 $(-\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}$ 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 삼각함수의 합과 곱의 관계 및 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 주어진 조건은 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 와 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{6}{5}$ 이다. 이 범위에서 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이다.

구하고자 하는 식을 간단히 하면 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ 이다.

주어진 식 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{6}{5}$ 의 양변을 제곱하면 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2\sin \theta \cos \theta$ 이므로,

$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$ 이다. 여기서 $2\sin \theta \cos \theta = \frac{36}{25} - 1 = \frac{11}{25}$ 이므로 $\sin \theta \cos \theta = \frac{11}{50}$ 이다. 이는 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 조건에 부합한다.

따라서 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{11}{50}} = \frac{50}{11}$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 함수의 그래프가 주어지지 않은 상태에서, 함수의 대칭이동과 결합된 새로운 함수의 우극한과 좌극한을 각각 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x)$ 의 정의에 따라 함수 $f(-x)$ 는

$$f(-x) = \begin{cases} -x + 3 & (x > -1) \\ x + 1 & (x \leq -1) \end{cases}$$

이다.

문제에서 요구하는 두 개의 극한값을 각각 구한다.

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $x > 1$ 이고 $x > -1$ 이므로, $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) - f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} \{(-x + 1) - (-x + 3)\} = (-1 + 1) - (-1 + 3) = 0 - 2 = -2$ 이다.

$x \rightarrow -1-$ 일 때 $x < -1$ 이므로, $\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x) - f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow -1-} \{(x + 3) - (x + 1)\} = (-1 + 3) - (-1 + 1) = 2 - 0 = 2$ 이다.

따라서 구하는 값은 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = -2 + 2 = 0$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 삼각함수 사이의 관계와 각의 사분면 조건을 이용하여 삼각함수와 관련된 식의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 식 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 의 양변을 제곱하면 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$ 입니다.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ 이고, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 $1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5}$ 입니다.

따라서 $2\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{5}$ 입니다.

구하려는 값을 k 라 하면 $k = \sin \theta - \cos \theta$ 이고, $k^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta$ 입니다.

$k^2 = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{5}$ 이므로 $k = \pm \sqrt{\frac{9}{5}} = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 입니다.

한편, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이고 $\cos \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 입니다.

따라서 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 입니다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수 그래프 위의 두 점의 중점 좌표를 이용하여 지수함수의 밑을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 $P(-1, a^{-1})$, $Q(1, a)$ 의 중점을 M 이라 하면, M 의 좌표는 $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{a^{-1}+a}{2}\right)$ 즉, $\left(0, \frac{\frac{1}{a}+a}{2}\right)$ 이다.

문제의 조건에서 선분 PQ 의 중점의 y 좌표가 $\frac{5}{4}$ 이므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\frac{1}{a}+a}{2} = \frac{5}{4}$$

양변에 $4a$ 를 곱하여 정리하면 $2 + 2a^2 = 5a$, 즉 $2a^2 - 5a + 2 = 0$ 이다.
 이차방정식을 풀면 $(2a - 1)(a - 2) = 0$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 2$ 이다.
 주어진 조건에서 $a > 1$ 이므로, $a = 2$ 이다.
 따라서 구하는 a 의 값은 2 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 삼각함수의 성질과 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 방정식은 $2\cos^2(\pi + x) + 3\sin x - 3 = 0$ 이고, 해의 범위는 $0 \leq x < 2\pi$ 이다.

각의 변환 공식에 의해 $\cos(\pi + x) = -\cos x$ 이므로 $\cos^2(\pi + x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$ 이다.

주어진 방정식은 $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ 으로 변형되고, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 를 대입하면 $2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 = 0$ 이다.

이 식을 정리하면 $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ 이고, 좌변을 인수분해하면 $(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$ 이다.

따라서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$ 이다.

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 인 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{6}$ 이고, $\sin x = 1$ 인 해는 $x = \frac{\pi}{2}$ 이다.

그러므로 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 로그의 성질과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미지수의 값을 구하고, 이를 통해 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 첫 번째 조건 $\log_3(ab) = 2$ 에서 로그의 성질에 따라 $\log_3 a + \log_3 b = 2$ 이다. 두 번째 조건은 $\log_3 a \cdot \log_3 b = -3$ 이다. 여기서 $\log_3 a$ 와 $\log_3 b$ 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식을 세울 수 있다. 근과 계수의 관계에 의해 이 이차방정식은 $t^2 - (\log_3 a + \log_3 b)t + (\log_3 a \cdot \log_3 b) = 0$, 즉 $t^2 - 2t - 3 = 0$ 이다. 이 방정식을 풀면 $(t - 3)(t + 1) = 0$ 이므로 두 근은 $t = 3$ 또는 $t = -1$ 이다. 따라서 $\{\log_3 a, \log_3 b\} = \{3, -1\}$ 이다. 만약 $\log_3 a = 3$ 이고 $\log_3 b = -1$ 이면, $a = 3^3 = 27$ 이고 $b = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ 이다. 반대의 경우에도 a, b 의 값만 서로 바뀔 뿐 합은 동일하다. 따라서 구하는 값은 $a + b = 27 + \frac{1}{3} = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 두 함수의 그래프가 만나는 점의 좌표를 구하고, 두 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $2\cos(2x) = 2\sin(2x)$ 의 실근과 같습니다. 이 방정식은 $\cos(2x) = \sin(2x)$ 와 같습니다. 주어진 정의역 $\{x | 0 \leq x < \pi\}$ 에서 $\cos(2x) = 0$ 인 경우 $\sin(2x) \neq 0$ 이므로 $\cos(2x) \neq 0$ 입니다. 따라서 양변을 $\cos(2x)$ 로 나누면 $\tan(2x) = 1$ 을 얻습니다.

$t = 2x$ 로 치환하면 $0 \leq x < \pi$ 이므로 $0 \leq t < 2\pi$ 입니다. 이 범위에서 방정식 $\tan t = 1$ 의 해는 $t = \frac{\pi}{4}$ 또는 $t = \frac{5\pi}{4}$ 입니다. $t = 2x$ 이므로 x 의 값을 구하면 $x = \frac{\pi}{8}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{8}$ 입니다. 이 값들이 α, β 가 됩니다.

따라서 두 점의 x 좌표의 차의 절댓값은 $|\alpha - \beta| = \left| \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right| = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ 입니다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수부등식과 로그부등식의 해를 구하고, 그 공통 범위를 추가적인 관계식과 연계하여 미지수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $\log_2(x - 1) < 3$ 에서 진수 조건에 의해 $x - 1 > 0$ 이므로 $x > 1$ 이다.

부등식을 풀면 $x - 1 < 2^3$, 즉 $x < 9$ 이므로 해는 $1 < x < 9$ 이다.

두 번째 부등식 $9^x - (3^a + 1)3^x + 3^a < 0$ 에서 $3^x = t$ 로 치환하면 $t > 0$ 이고, 부등식은 $t^2 - (3^a + 1)t + 3^a < 0$ 이다.
 $(t - 1)(t - 3^a) < 0$ 이고 양수 a 에 대하여 $3^a > 3^0 = 1$ 이므로 $1 < t < 3^a$ 이다.
 $1 < 3^x < 3^a$ 에서 $0 < x < a$ 이다.

두 부등식의 공통 범위는 $1 < x < \min(9, a)$ 이다.
 문제에서 연립부등식의 해가 $1 < x < b$ 라고 하였으므로 $b = \min(9, a)$ 이다.
 (i) $a \leq 9$ 일 경우, $b = a$ 이다. $ab = 36$ 에서 $a^2 = 36$ 이고, $a > 0$ 이므로 $a = 6$ 이다. 이는 $a \leq 9$ 를 만족시킨다.
 (ii) $a > 9$ 일 경우, $b = 9$ 이다. $ab = 36$ 에서 $9a = 36$ 이므로 $a = 4$ 이다. 이는 $a > 9$ 라는 가정에 모순된다.
 따라서 $a = 6, b = 6$ 이므로 $a + b = 12$ 이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 코사인 함수의 최댓값, 최솟값, 주기, 평행이동을 나타내는 미정계수를 조건으로부터 구하고 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.
 [풀이]
 함수 $f(x) = a \cos(bx + c) - 1$ 에서 $a > 0$ 이므로 최댓값은 $a - 1$, 최솟값은 $-a - 1$ 이다. 조건 (가)에서 최댓값이 3 이므로 $a - 1 = 3$ 에서 $a = 4$ 이다. 이는 최솟값이 $-4 - 1 = -5$ 라는 조건과 일치한다.
 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$ 이고 $b > 0$ 이다. 조건 (나)에서 주기가 4 이므로 $\frac{2\pi}{b} = 4$ 에서 $b = \frac{\pi}{2}$ 이다.
 조건 (다)에서 $x = 1$ 에서 최솟값 -5 를 가지므로 $f(1) = 4 \cos(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + c) - 1 = -5$ 이다. 이 식을 정리하면 $4 \cos(\frac{\pi}{2} + c) = -4$, 즉 $\cos(\frac{\pi}{2} + c) = -1$ 이다. 따라서 $\frac{\pi}{2} + c = (2n + 1)\pi$ (n 은 정수)이고, $c = (2n + 1)\pi - \frac{\pi}{2}$ 이다. $0 < c < 2\pi$ 를 만족하는 정수 n 은 0 이므로, $c = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이다.
 따라서 $a = 4, b = \frac{\pi}{2}, c = \frac{\pi}{2}$ 이므로 구하는 값은 $a + \frac{4b}{\pi} + \frac{2c}{\pi} = 4 + \frac{4(\pi/2)}{\pi} + \frac{2(\pi/2)}{\pi} = 4 + 2 + 1 = 7$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 등비수열의 성질과 로그의 여러 가지 성질을 통합적으로 이용하여 미지수의 값을 구하는 문항을 해결할 수 있는지를 평가한다.
 [풀이]
 세 양수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비증항의 성질에 따라 $b^2 = ac$ 이다. 이 식의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면 $\log_a(b^2) = \log_a(ac)$ 이므로, $2\log_a b = \log_a a + \log_a c$ 에서 $2\log_a b = 1 + \log_a c$ 이다. 따라서 $\log_a c = 2\log_a b - 1$ 이다.
 문제의 조건 $\log_a(bc) = 3$ 에서 로그의 성질에 따라 $\log_a b + \log_a c = 3$ 이다. 이 식에 위에서 구한 $\log_a c = 2\log_a b - 1$ 을 대입하면 $\log_a b + (2\log_a b - 1) = 3$ 이므로 $3\log_a b = 4$, 즉 $\log_a b = \frac{4}{3}$ 이다. 따라서 $\log_a c = 2(\frac{4}{3}) - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$ 이다.
 구하는 값은 $\log_b c$ 이며, 밑 변환 공식에 따라 $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ 이다. 따라서 $\log_b c = \frac{5/3}{4/3} = \frac{5}{4}$ 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해하고, 밑의 부호와 지수의 홀짝성에 따라 실수인 거듭제곱근의 개수를 판별하여 주어진 방정식을 만족하는 자연수를 찾을 수 있는지를 평가한다.
 [풀이]
 $f(n)$ 은 $10 - n$ 의, $g(n)$ 은 $-n^2 + 10n - 21 = -(n - 3)(n - 7)$ 의 실수인 n 제곱근의 개수이다. n 의 홀짝성에 따라 경우를 나누어 $f(n) + g(n) = 2$ 를 만족하는 n 을 찾는다.
 (i) n 이 홀수인 경우 ($n = 3, 5, 7, 9, 11$)
 n 이 홀수일 때는 밑의 부호에 관계없이 실수인 n 제곱근은 항상 1개이다.

따라서 $f(n) = 1$, $g(n) = 1$ 이므로 $f(n) + g(n) = 1 + 1 = 2$ 가 항상 성립한다.
 그러므로 $n = 3, 5, 7, 9, 11$ 은 모두 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) n 이 짝수인 경우 ($n = 4, 6, 8, 10, 12$)
 $f(n)$ 과 $g(n)$ 은 밑의 부호에 따라 0, 1, 2 의 값을 가질 수 있다. $f(n) + g(n) = 2$ 가 되는 경우는 $(f(n), g(n))$ 이 $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ 일 때이다.
 n 이 짝수일 때 $f(n) = 1$ 또는 $g(n) = 1$ 이려면 밑이 0이어야 하는데, $10 - n = 0$ 에서 $n = 10$, $-(n - 3)(n - 7) = 0$ 에서 $n = 3, 7$ 이므로 $(f(n), g(n)) = (1, 1)$ 인 경우는 n 이 짝수일 때 존재하지 않는다.
 $-(f(n), g(n)) = (0, 2)$ 인 경우: $f(n) = 0$ 에서 $10 - n < 0$ 이고, $g(n) = 2$ 에서 $-(n - 3)(n - 7) > 0$ 이다. $n > 10$ 인 동시에 $3 < n < 7$ 을 만족하는 짝수 n 은 존재하지 않는다.
 $-(f(n), g(n)) = (2, 0)$ 인 경우: $f(n) = 2$ 에서 $10 - n > 0$ 이고, $g(n) = 0$ 에서 $-(n - 3)(n - 7) < 0$ 이다. $n < 10$ 인 동시에 ($n < 3$ 또는 $n > 7$)을 만족하는 짝수 n 은 8 이다.
 (i), (ii)에서 구한 모든 자연수 n 은 3, 5, 7, 9, 11 과 8 이다.
 따라서 모든 n 의 값의 합은 $3 + 5 + 7 + 8 + 9 + 11 = 43$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 포물선과 직선의 교점을 이용하여 정의된 수열의 일반항을 구하고, 부분분수 분해를 이용한 수열의 합을 계산할 수 있다.
 [풀이]
 포물선 $y^2 = x$ 와 직선 $y = (1/n)x$, 즉 $x = ny$ 의 교점을 구하기 위해 두 식을 연립하면 $y^2 = ny$ 이다. $y(y - n) = 0$ 에서 $y = 0$ 또는 $y = n$ 이다. 원점이 아닌 교점이므로 $y_n = n$ 이다.
 주어진 식에 $y_k = k$ 를 대입하면

$$\sum_{k=1}^{48} 49 / (y_k y_{k+1}) = \sum_{k=1}^{48} \frac{49}{k(k+1)}$$
 이다. 이는 부분분수 분해를 이용하여 정리할 수 있다. $\frac{49}{k(k+1)} = 49 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ 이므로, 주어진 식은 다음과 같이 계산된다.

$$49 \sum_{k=1}^{48} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 49 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{49} \right) \right] = 49 \left(1 - \frac{1}{49} \right) = 49 \times \frac{48}{49} = 48$$
 이다.
 따라서 구하는 값은 48이다.

16. 정답 및 풀이

정답: ③
 [출제의도] 구간에 따라 다르게 정의된 지수함수를 이해하고, 이를 활용하여 지수방정식의 모든 실근의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.
 [풀이]
 함수 $g(x)$ 의 정의는 x 의 부호에 따라 달라지므로, x 와 $x - 3$ 의 부호를 기준으로 구간을 나누어 방정식을 푼다. 경계점은 $x = 0$ 과 $x = 3$ 이다.
 (i) $x < 0$ 일 때:
 $x < 0$ 이고 $x - 3 < 0$ 이므로 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 이고 $g(x - 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2^{-(x-3)}$ 이다.
 방정식은 $2^{-x} \cdot 2^{-x+3} = 32$ 이므로 $2^{-2x+3} = 2^5$ 이다.
 $-2x + 3 = 5$ 에서 $x = -1$ 이고, 이는 $x < 0$ 조건을 만족한다.
 (ii) $0 \leq x < 3$ 일 때:
 $x \geq 0$ 이고 $x - 3 < 0$ 이므로 $g(x) = 2^x$ 이고 $g(x - 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 2^{-x+3}$ 이다.
 방정식은 $2^x \cdot 2^{-x+3} = 32$ 이므로 $2^3 = 32$ 즉 $8 = 32$ 가 되어 모순이다. 따라서 이 구간에서 해는 없다.
 (iii) $x \geq 3$ 일 때:
 $x > 0$ 이고 $x - 3 \geq 0$ 이므로 $g(x) = 2^x$ 이고 $g(x - 3) = 2^{x-3}$ 이다.

방정식은 $2^x \cdot 2^{x-3} = 32$ 이므로 $2^{2x-3} = 2^5$ 이다.

$2x - 3 = 5$ 에서 $x = 4$ 이고, 이는 $x \geq 3$ 조건을 만족한다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 실근은 -1 과 4 이므로, 그 합은 $-1 + 4 = 3$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 특정 항의 값을 구한다.

[풀이] 조건 (나)에서 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 하면, 모든 자연수 n 에 대하여 $S_{2n} = 4S_n$ 이 성립한다. 이 관계는 S_n 이 n 에 대한 이차식, 즉 $S_n = cn^2$ (c 는 상수) 형태일 때 만족된다. $S_1 = a_1$ 이므로 $c = a_1$ 이고, $S_n = a_1 n^2$ 이다.

수열 a_n 의 일반항을 구하면, $n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1} = a_1 n^2 - a_1 (n-1)^2 = a_1 (2n-1)$ 이다. $n = 1$ 일 때 $a_1 = a_1 (2 \times 1 - 1)$ 이므로 이 식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다. 수열 a_n 은 첫째항이 a_1 이고 공차가

$d = a_{n+1} - a_n = a_1 (2(n+1) - 1) - a_1 (2n - 1) = 2a_1$ 인 등차수열이다.

조건 (가)에서 $a_7 - a_3 = (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) = 4d = 16$ 이므로, 공차 $d = 4$ 이다. $d = 2a_1$ 이므로 $4 = 2a_1$, 즉 첫째항 $a_1 = 2$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a_9 = a_1 + 8d = 2 + 8(4) = 34$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 로그 함수의 평행이동을 이해하고, 주어진 기하학적 조건을 이용하여 미지수를 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 곡선이 점 $(3, 1)$ 에서 만나므로, 점 $(3, 1)$ 을 함수 $y = \log_3 (x - p) + q$ 의 식에 대입하면 $1 = \log_3 (3 - p) + q$ 이다. 이 식을 정리하면 $1 - q = \log_3 (3 - p)$, 즉 $3^{1-q} = 3 - p$ 이다.

점 A는 $y = \log_3 x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점이므로 $0 = \log_3 x$ 에서 $x = 1$ 이다. 따라서 A(1, 0) 이다. 점 B는 $y = \log_3 (x - p) + q$ 의 그래프가 직선 $y = 2$ 와 만나는 점이므로 $2 = \log_3 (x - p) + q$ 에서 $2 - q = \log_3 (x - p)$ 이고, $x = p + 3^{2-q}$ 이다. 따라서 B($p + 3^{2-q}$, 2) 이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{2-0}{(p+3^{2-q})-1} = \frac{1}{2}$ 이다. 이 식을 정리하면 $4 = p + 3^{2-q} - 1$, 즉 $p + 3^{2-q} = 5$ 이다. 위에서 구한 $p = 3 - 3^{1-q}$ 를 대입하면 $(3 - 3^{1-q}) + 3^{2-q} = 5$ 이다. $3 - 3 \cdot 3^{-q} + 9 \cdot 3^{-q} = 5$ 에서 $6 \cdot 3^{-q} = 2$ 이므로 $3^{-q} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ 이다. 따라서 $q = 1$ 이다. $p = 3 - 3^{1-1} = 3 - 1 = 2$ 이다.

그러므로 $p + q = 2 + 1 = 3$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값 문제와 직선의 기울기 개념을 지수함수와 결합하여 해결하는 능력을 평가한다.

[풀이] 점 $A(a, 2^a)$ 를 직선 $y = 1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(a, 2 - 2^a)$ 이다.

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 선분 $A'B$ 의 길이와 같으므로, $\overline{A'B} = \sqrt{((a+6) - a)^2 + (b - (2 - 2^a))^2} = \sqrt{36 + (b + 2^a - 2)^2} = 10$ 이다.

$36 + (b + 2^a - 2)^2 = 100$ 에서 $(b + 2^a - 2)^2 = 64$ 이고, $a > 0, b > 0$ 이므로 $b + 2^a > 1$ 이므로 $b + 2^a - 2 > -1$ 이다.

따라서 $b + 2^a - 2 = 8$ 이므로 $b + 2^a = 10$ 이다.㉠

두 점 $B(a+6, b)$, $C(a, -b)$ 를 잇는 직선의 기울기는 $\frac{-b-b}{a-(a+6)} = \frac{-2b}{-6} = \frac{b}{3}$ 이다.

주어진 조건에 따라 $\frac{b}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2^a$ 이므로 $b = 2^a$ 이다.㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b + b = 10$ 에서 $2b = 10$ 이므로 $b = 5$ 이고, $2^a = 5$ 이다.

따라서 구하는 값은 $4b - 2^a = 4(5) - 5 = 15$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계와 그래프의 대칭성을 이용하여 주어진 도형의 넓이 조건을 만족하는 미지수의 값을 구한다.

[풀이] 함수 $y = \log_2(x - k)$ 의 역함수는 $x = \log_2(y - k)$ 에서 $2^x = y - k$ 이므로 $y = 2^x + k$ 이다. 즉, 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

직선 $y = -x + 10$ 은 기울기가 -1 이므로 그 자체로 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 두 교점 A, B 역시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 B의 좌표는 (b, a) 이다. 점 A, B는 직선 $y = -x + 10$ 위의 점이므로 $b = -a + 10$, 즉 $a + b = 10$ 이다. 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A| = \frac{1}{2}|a^2 - b^2| = \frac{1}{2}|(a - b)(a + b)|$ 이다. 점 A의 x 좌표가 점 B의 x 좌표보다 크므로 $a > b$ 이다.

삼각형 OAB의 넓이가 20이므로 $\frac{1}{2}(a - b)(a + b) = \frac{1}{2}(a - b) \cdot 10 = 5(a - b) = 20$ 이다. 따라서 $a - b = 4$ 이다.

두 식 $a + b = 10$ 과 $a - b = 4$ 를 연립하여 풀면 $2a = 14$, $2b = 6$ 이므로 $a = 7, b = 3$ 이다. 즉, 점 A의 좌표는 $(7, 3)$ 이다.

점 A $(7, 3)$ 은 함수 $f(x) = \log_2(x - k)$ 의 그래프 위에 있으므로, $3 = \log_2(7 - k)$ 이다. 로그의 정의에 따라 $2^3 = 7 - k$ 이므로 $8 = 7 - k$ 이다.

따라서 $k = 7 - 8 = -1$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 점화식으로 정의된 수열의 항을 역추적하고, 규칙을 발견하여 수열의 합을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$n = 15$ 는 홀수이므로 조건 (가)에 의해 $a_{16} = a_{15} - 2$ 이다. 주어진 조건 $a_{15} + a_{16} = 8$ 에 대입하면 $a_{15} + (a_{15} - 2) = 8$ 이므로 $2a_{15} = 10$, 즉 $a_{15} = 5$ 이고 $a_{16} = 3$ 이다.

$n = 2k$ (짝수)일 때 조건 (나)에 의해 $a_{2k+2} = -a_{2k} + 2k$ 이고, $n = 2k + 1$ (홀수)일 때 조건 (가)에 의해 $a_{2k+2} = a_{2k+1} - 2$ 이다. 따라서 $-a_{2k} + 2k = a_{2k+1} - 2$ 이므로, $a_{2k} + a_{2k+1} = 2k + 2$ 라는 관계식을 얻는다. 구하고자 하는 합은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = a_1 + a_{12} + \sum_{k=1}^5 (a_{2k} + a_{2k+1}) = a_1 + a_{12} + \sum_{k=1}^5 (2k + 2) = a_1 + a_{12} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 2 \cdot 5 = a_1 + a_{12} + 40$$

이다.

a_1 과 a_{12} 를 구하기 위해 항을 역추적한다.

$a_{16} = -a_{14} + 14$ 에서 $3 = -a_{14} + 14$ 이므로 $a_{14} = 11$ 이다.

$a_{14} = -a_{12} + 12$ 에서 $11 = -a_{12} + 12$ 이므로 $a_{12} = 1$ 이다.

$a_{12} = -a_{10} + 10 \Rightarrow 1 = -a_{10} + 10 \Rightarrow a_{10} = 9$.

$a_{10} = -a_8 + 8 \Rightarrow 9 = -a_8 + 8 \Rightarrow a_8 = -1$.

$a_8 = -a_6 + 6 \Rightarrow -1 = -a_6 + 6 \Rightarrow a_6 = 7$.

$a_6 = -a_4 + 4 \Rightarrow 7 = -a_4 + 4 \Rightarrow a_4 = -3$.

$a_4 = -a_2 + 2 \Rightarrow -3 = -a_2 + 2 \Rightarrow a_2 = 5$.

$a_2 = a_1 - 2 \Rightarrow 5 = a_1 - 2 \Rightarrow a_1 = 7$.

따라서

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = a_1 + a_{12} + 40 = 7 + 1 + 40 = 48$$

이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 4

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 밑을 같게 만든 후 지수부등식을 풀어 정수 해의 개수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 주어진 부등식 $(\frac{1}{9})^{x^2-2} \geq 3^{x-4}$ 의 밑을 3으로 통일하면 $(3^{-2})^{x^2-2} \geq 3^{x-4}$, 즉 $3^{-2x^2+4} \geq 3^{x-4}$ 이다.

밑 3이 1보다 크므로 지수 사이의 부등호 방향은 그대로 유지되어 $-2x^2+4 \geq x-4$ 이다.

이 식을 정리하면 $2x^2+x-8 \leq 0$ 이다.

이차방정식 $2x^2+x-8=0$ 의 두 근은 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{4}$ 이므로, 부등식의 해는 $\frac{-1-\sqrt{65}}{4} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{65}}{4}$ 이다.

$8 < \sqrt{65} < 9$ 이므로 $-2.5 < \frac{-1-\sqrt{65}}{4} < -2.25$ 이고 $1.75 < \frac{-1+\sqrt{65}}{4} < 2$ 이다.

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

23. 정답 및 풀이

정답: 15

[출제의도] 등차수열의 합 공식과 일반항의 성질을 이용하여 특정 항들의 합을 구하는 문제이다.

[풀이]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면, 주어진 조건은 $S_{12} = 90$ 이다.

등차수열의 합 공식에 따라 $S_{12} = \frac{12(a_1+a_{12})}{2} = 6(a_1+a_{12})$ 이므로 $a_1+a_{12} = 15$ 이다.

등차수열의 성질에 따라 $p+q=r+s$ 이면 $a_p+a_q=a_r+a_s$ 가 성립한다. $4+9=1+12=13$ 이므로 $a_4+a_9=a_1+a_{12}$ 이다.

따라서 구하는 값은 15 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: 1

[출제의도] 주어진 범위에서 이차함수를 지수로 갖는 지수함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

[풀이]

함수 $y = 4^{-x^2+2x+1}$ 의 지수를 $g(x) = -x^2+2x+1$ 이라 하자.

$g(x) = -(x^2-2x+1)+2 = -(x-1)^2+2$ 이므로, 정의역 $\{-1 \leq x \leq 2\}$ 에서 $g(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 2 를 갖고, $x=-1$ 일 때 최솟값 $g(-1) = -(-1-1)^2+2 = -2$ 를 갖는다.

주어진 함수 $y = 4^{g(x)}$ 는 밑 4 가 1 보다 크므로, 지수 $g(x)$ 가 최대일 때 최댓값을, 최소일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 최댓값 $M = 4^2 = 16$ 이고, 최솟값 $m = 4^{-2} = \frac{1}{16}$ 이다.

그러므로 구하는 값은 $Mm = 16 \times \frac{1}{16} = 1$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: 18

[출제의도] 코사인법칙과 삼각형의 넓이 공식을 활용하여 등차수열을 이루는 세 변의 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $a-d, a, a+d$ ($a > d > 0$)라 하자. $\cos B < 0$ 이므로 $\angle B$ 는 둔각이고, 마주보는 변 AC가 가장 긴 변이다.

따라서 $\overline{AC} = a+d$ 이고, 나머지 두 변의 길이는 a 와 $a-d$ 이다. $\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-(-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $3\sqrt{15}$ 이므로, $\frac{1}{2} \times a \times (a-d) \times \sin B = 3\sqrt{15}$ 에서 $\frac{1}{2}a(a-d)\frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$ 이므로 $a(a-d) = 24$ 이다. 코사인법칙에 의해 $(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 - 2a(a-d)\cos B$ 이므로

$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + a^2 - 2ad + d^2 - 2a(a-d)(-\frac{1}{4})$ 이다. 식을 정리하면 $4ad = a^2 + \frac{1}{2}a(a-d)$ 이고, $a > 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면 $4d = a + \frac{1}{2}(a-d)$ 에서 $a = 3d$ 이다.

$a = 3d$ 를 $a(a-d) = 24$ 에 대입하면 $3d(2d) = 24$ 이므로 $6d^2 = 24$, $d^2 = 4$ 이다. $d > 0$ 이므로 $d = 2$ 이고 $a = 6$ 이다. 따라서 세 변의 길이는 4, 6, 8 이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $4+6+8 = 18$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: 30

[출제의도] 로그로 정의된 수들의 대소 관계를 파악하고, 주어진 조건을 만족하는 값을 구하여 식의 값을 계산하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$t = \log_2 k$ 라 하자. $1 < k < 2$ 이므로 $0 < t < 1$ 이다. 이때 $0 < t^2 < t$ 이므로, 집합 $B = \{t, -t, t^2, -t^2\}$ 의 원소를 크기순으로 나열하면 $-t < -t^2 < t^2 < t$ 이다. 따라서 조건 (가)에 의해 $p = -t, q = -t^2, r = t^2, s = t$ 이다.

조건 $qr = -\frac{1}{16}$ 에서 $(-t^2)(t^2) = -\frac{1}{16}$ 이므로, $t^4 = \frac{1}{16}$ 이다. $t > 0$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$ 이다. 이 값은 $0 < t < 1$ 을 만족시킨다. 구하는 값은 $120(s+q) = 120(t-t^2)$ 이다. $t = \frac{1}{2}$ 를 대입하면, $120(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2) = 120(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 120 \times \frac{1}{4} = 30$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 112

[출제의도] 매개변수를 포함한 삼각방정식의 근의 합을 그래프의 대칭성을 이용하여 구하고, 시그마의 합을 계산하는 문제입니다.

[풀이]

방정식 $|f(x)| = 5$ 는 $f(x) = 5$ 또는 $f(x) = -5$ 와 같습니다. 주어진 함수 $f(x)$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같은 두 방정식을 얻습니다.

$$(i) n\sin(\frac{\pi}{2}x) + n - 5 = 5, \text{ 즉 } \sin(\frac{\pi}{2}x) = \frac{10-n}{n}$$

$$(ii) n\sin(\frac{\pi}{2}x) + n - 5 = -5, \text{ 즉 } \sin(\frac{\pi}{2}x) = -1$$

함수 $y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ 이며, 정의역 $[0, 8]$ 은 두 주기에 해당합니다. 방정식 (ii)에서 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = -1$ 을 만족하는 x 는 $x = 3, 7$ 이므로, 이 방정식의 실근의 합은 항상 $3 + 7 = 10$ 입니다.

방정식 (i)의 실근의 합은 n 의 값에 따라 달라집니다. $k = \frac{10-n}{n}$ 이라 놓고 n 의 값에 따른 k 의 범위를 확인합니다.

$n = 2, 3, 4$ 일 때, $k > 1$ 이므로 방정식 (i)의 실근은 존재하지 않습니다. 따라서 $g(2) = g(3) = g(4) = 10$ 입니다.

$n = 5$ 일 때, $k = 1$ 이므로 $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$ 의 실근은 $x = 1, 5$ 이고 합은 6입니다. 따라서 $g(5) = 6 + 10 = 16$ 입니다.

$n = 6, 7, 8$ 일 때, $0 < k < 1$ 입니다. $y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ 의 그래프는 두 직선 $x = 1$ 과 $x = 5$ 에 대하여 대칭입니다. 한 주기 $[0, 4]$ 에서 두 실근의 합은 2, 다음 주기 $[4, 8]$ 에서 두 실근의 합은 10 이므로, 총 4개의 실근의 합은 $2 + 10 = 12$ 입니다. 따라서 $g(6) = g(7) = g(8) = 12 + 10 = 22$ 입니다.

따라서 구하는 값은

$$\sum_{n=2}^8 g(n) = g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6) + g(7) + g(8)$$

이므로

$$3 \times 10 + 16 + 3 \times 22 = 30 + 16 + 66 = 112 \text{ 입니다.}$$

따라서 최종 정답은 112입니다.

28. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 복합적으로 이용하여 정의된 수열의 특정 항을 구하는 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문항이다.

[풀이]

(나) 조건에 의해 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = a_{2n-1} + 3a_{2n-1} = 4a_{2n-1}$ 이다.

(가) 조건에서 수열 b_n 의 공차를 d (d 는 자연수)라 하면, $b_{n+1} - b_n = d$ 이다. 따라서 $4a_{2n+1} - 4a_{2n-1} = d$ 이고 $a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{d}{4}$ 이다. 모든 항이 자연수인 수열 a_n 에서 홀수 번째 항들의 차 $\frac{d}{4}$ 는 정수여야 하므로, 공차 d 는 4의 배수이다. $d = 4k$ (k 는 자연수)라 하면, 수열 a_{2n-1} 은 첫째항이 a_1 이고 공차가 k 인 등차수열이다. 즉, $a_{2n-1} = a_1 + (n-1)k$ 이다.

(다) 조건에서 $a_4 = 66$ 이고, (나) 조건에 의해 $a_4 = 3a_3$ 이므로 $a_3 = 22$ 이다. $a_3 = a_{2 \times 2 - 1} = a_1 + (2-1)k = a_1 + k$ 이므로, $a_1 + k = 22$ 이다.

또한, $\sum_{k=1}^8 a_k = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 400$ 이다. 수열 b_n 은 첫째항이 $b_1 = 4a_1$ 이고 공차가 $d = 4k$

인 등차수열이므로, 첫째항부터 제4항까지의 합은 $\frac{4(2b_1 + 3d)}{2} = 4b_1 + 6d = 400$ 이다. $b_1 = 4a_1, d = 4k$ 를 대입하면 $4(4a_1) + 6(4k) = 400$ 이고, 정리하면 $16a_1 + 24k = 400$, 즉 $2a_1 + 3k = 50$ 이다.

연립방정식 $a_1 + k = 22$ 와 $2a_1 + 3k = 50$ 을 풀면, $a_1 = 16, k = 6$ 을 얻는다. 구하고자 하는 값은 a_9 이므로 $n = 5$ 일 때의 홀수 번째 항이다. $a_9 = a_{2 \times 5 - 1} = a_1 + (5 - 1)k = a_1 + 4k = 16 + 4(6) = 40$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: 60

[출제의도] 절댓값이 포함된 삼각함수의 그래프와 방정식의 해를 수열과 연관 지어 주어진 조건을 만족시키는 미정계수를 구한다.

[풀이]

함수 $f(x) = |p \sin x - q|$ 에 대하여 방정식 $f(a) = q$ 의 해는 $|p \sin a - q| = q$ 에서 $p \sin a - q = q$ 또는 $p \sin a - q = -q$ 이므로, $\sin a = \frac{2q}{p}$ 또는 $\sin a = 0$ 의 해와 같다. p, q 는 자연수이므로 $\frac{2q}{p} > 0$ 이다.

만약 $\frac{2q}{p} > 1$ 이라면 $\sin a = \frac{2q}{p}$ 를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다. 이때 양수 a 는 $\sin a = 0$ 의 해이므로 $a_n = n\pi$ 이다. 이 경우 $a_2 = 2\pi, a_3 = 3\pi$ 이므로 조건 (가) $a_3 = 2a_2$ 에 대입하면 $3\pi = 2(2\pi) = 4\pi$ 가 되어 모순이다. 따라서 $0 < \frac{2q}{p} \leq 1$ 이어야 한다.

$c = \frac{2q}{p}$ 라 하고 $\alpha = \sin^{-1} c$ ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) 라 하자. 방정식 $\sin a = c$ 의 양수 해와 $\sin a = 0$ 의 양수 해를 크기순으로 나열하면 $a_1 = \alpha, a_2 = \pi - \alpha, a_3 = \pi, \dots$ 이다. 조건 (가) $a_3 = 2a_2$ 에 대입하면 $\pi = 2(\pi - \alpha)$ 이고, 식을 정리하면 $2\alpha = \pi$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 $c = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ 이고 $\frac{2q}{p} = 1$ 에서 $p = 2q$ 이다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 60이다. $p = 2q$ 이고 q 가 자연수이므로 $p > q$ 이다. 이 경우 $f(x) = |p \sin x - q|$ 의 최솟값은 $p \sin x = q$ 일 때 0이 된다. 최댓값은 $\sin x = -1$ 일 때 $|-p - q| = p + q$ 이다. 따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $(p + q) + 0 = 60$ 이다.

$p = 2q$ 와 $p + q = 60$ 을 연립하여 풀면 $3q = 60$ 이므로 $q = 20$ 이고, $p = 40$ 이다. p, q 는 모두 자연수이므로 조건을 만족시킨다. 구하는 값은 $p + q = 40 + 20 = 60$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 8

[출제의도] 구간별 함수의 그래프와 교점의 개수를 이용해 미지수를 결정한다.

[풀이] $x < 0$ 에서 $f(x) = |x^2 - a^2|$ 의 경계값은 a^2 이고, $x \geq 0$ 에서 $f(x) = -x^3 + 3ax^2$ 는 $x = 2a$ 에서 최댓값 $4a^3$ 을 갖는다. 따라서 $g(t)$ 의 불연속점은 $t = a^2, 4a^3$ 이고, $g(t)$ 의 중간값은 $m = 3$ 이다. 조건에 따라 $|4a^3 - a^2| = 3$.

$a > 1/4$ 이면 $4a^3 - a^2 = 3$, 즉 $(a - 1)(4a^2 + 3a + 3) = 0$ 이므로 $a = 1$ 이다. $0 < a < 1/4$ 이면 $4a^3 - a^2 + 3 = 0$ 인데 이 구간에서 함수가 양수이므로 해가 없다. 따라서 $a = 1$.

이때 $f(-3) = |9 - 1| = 8$, $f(4) = -64 + 48 = -16$ 이므로 $|f(-3) + f(4)| = |8 - 16| = 8$ 이다.