

MathGenix 2026년 고1 9월 모의고사 대비 시험 05 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2609-05-SOL

출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	④	③	⑤	③	③	③	②	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	④	③	③	④	③	③	③	④
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	5	8	6	7	16	11	24	③	59

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 다항식을 구할 수 있다.

[풀이]

주어진 등식 $A - (B - X) = 3A$ 를 다항식 X 에 대하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$A - B + X = 3A$$

$$X = 3A - A + B$$

$$X = 2A + B$$

이제 주어진 다항식 A 와 B 를 대입하여 X 를 계산합니다.

$$A = 2x^2 + xy + y^2, B = x^2 + 2xy - y^2 \text{ 이므로,}$$

$$2A = 2(2x^2 + xy + y^2) = 4x^2 + 2xy + 2y^2$$

따라서 다항식 X 는

$$X = 2A + B$$

$$= (4x^2 + 2xy + 2y^2) + (x^2 + 2xy - y^2)$$

$$= (4x^2 + x^2) + (2xy + 2xy) + (2y^2 - y^2)$$

$$= 5x^2 + 4xy + y^2$$

그러므로 정답은 ③입니다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 복소수의 연산과 켤레복소수의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

실수가 아닌 복소수를 $z = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하자.

$$z^2 + z = (a + bi)^2 + (a + bi) = (a^2 - b^2 + a) + (2ab + b)i \text{ 이다. 이 값이 실수이므로 허수부분은 } 0 \text{ 이다.}$$

$$b(2a + 1) = 0 \text{ 이고 } b \neq 0 \text{ 이므로 } 2a + 1 = 0, \text{ 즉 } a = -\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{구하는 값은 } (z + 1)(\bar{z} + 1) = z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{문제의 조건에서 } z\bar{z} = 3 \text{ 이고, } z + \bar{z} = 2a = 2(-\frac{1}{2}) = -1 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 값은 $3 + (-1) + 1 = 3$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 좌표평면에서 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 두 선분의 길이 사이의 관계를 이차방정식으로 나타내어 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

핵심 조건 정리 → 원점 O와 점 A $(2, -3)$ 사이의 거리는 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ 이고, 두 점 A $(2, -3)$, B $(a, 1)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(a-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(a-2)^2 + 16}$ 이다.

필요한 식 전개 → 주어진 조건은 $\overline{AB} = 2\overline{OA}$ 이므로, 양변을 제곱하면 $\overline{AB}^2 = 4\overline{OA}^2$ 이다. 따라서 $(a-2)^2 + 16 = 4 \times 13 = 52$ 이다. 이 식을 정리하면 $a^2 - 4a + 4 + 16 = 52$, 즉 $a^2 - 4a - 32 = 0$ 이다.

정답 도출 → 위 이차방정식을 인수분해하면 $(a-8)(a+4) = 0$ 이다. 문제에서 a 는 양수이므로 $a = 8$ 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구하고, 주어진 추가 조건을 만족시키는 값을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 등식 $a(x+c)^2 + 1 = 2x^2 + bx + 9$ 가 x 에 대한 항등식이므로, 좌변을 전개하여 양변의 계수를 비교할 수 있다.

좌변을 전개하면,

$$a(x^2 + 2cx + c^2) + 1 = ax^2 + 2acx + ac^2 + 1$$

이 식이 $2x^2 + bx + 9$ 와 같아야 하므로, 양변의 동류항의 계수를 비교하면 다음 세 등식이 성립한다.

1) x^2 의 계수: $a = 2$

2) x 의 계수: $b = 2ac$

3) 상수항: $ac^2 + 1 = 9$

$a = 2$ 를 상수항 식에 대입하면,

$$2c^2 + 1 = 9$$

$$2c^2 = 8$$

$$c^2 = 4$$

따라서 $c = 2$ 또는 $c = -2$ 이다.

이제 주어진 조건 $a + b + c = 12$ 를 이용하여 c 의 값을 확정한다.

(i) $c = 2$ 인 경우:

$a = 2, c = 2$ 이므로 x 의 계수 식에 대입하면,

$$b = 2ac = 2(2)(2) = 8$$

세 상수의 합을 확인하면 $a + b + c = 2 + 8 + 2 = 12$ 로, 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $c = -2$ 인 경우:

$a = 2, c = -2$ 이므로 x 의 계수 식에 대입하면,

$$b = 2ac = 2(2)(-2) = -8$$

세 상수의 합을 확인하면 $a + b + c = 2 + (-8) + (-2) = -8$ 로, 주어진 조건(12)을 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $a = 2, b = 8, c = 2$ 이다.

문제에서 요구하는 값은 $b - c$ 이므로,

$$b - c = 8 - 2 = 6$$

그러므로 정답은 ③이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 평행이동한 직선이 원에 접할 조건을 이해하고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미지수의 합을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 직선 $y = k(x - 2)$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y - 3 = k((x - 2) - 2)$

이고, 이를 정리하면 $kx - y - 4k + 3 = 0$ 이다.

이 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리는 반지름의 길이 1 과 같다. 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면

$$\frac{|k(0) - (0) - 4k + 3|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \quad \text{이다.}$$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $(3 - 4k)^2 = k^2 + 1$, 즉 $9 - 24k + 16k^2 = k^2 + 1$ 이므로 $15k^2 - 24k + 8 = 0$ 이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 모든 상수 k 의 값의 합은 $-\frac{-24}{15} = \frac{8}{5}$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 나눗셈에서 나머지가 주어진 경우, 인수정리를 활용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

문제의 조건에 따라, $P(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $P(x) = (x - 1)^2 Q(x) + 2x + 3$ 이 성립한다. $F(x) = P(x) - (2x + 3)$

이라 하면, $F(x) = x^4 + ax^3 + 3x^2 + (b - 2)x - 2$ 는 $(x - 1)^2$ 으로 나누어떨어진다.

$F(x)$ 는 $(x - 1)$ 을 인수로 가지므로 인수정리에 의해 $F(1) = 0$ 이다. $F(1) = 1 + a + 3 + (b - 2) - 2 = a + b = 0$, 즉 $b = -a$ 이다.

$F(x)$ 를 $(x - 1)$ 로 나눈 몫 또한 $(x - 1)$ 로 나누어떨어져야 한다. $F(x)$ 에 $b = -a$ 를 대입하고 $(x - 1)$ 에 대해 조립제법을 쓰면 몫은

$x^3 + (a + 1)x^2 + (a + 4)x + 2$ 이다. 이 몫에 $x = 1$ 을 대입하면 $1 + (a + 1) + (a + 4) + 2 = 0$ 이다.

$2a + 8 = 0$ 이므로 $a = -4$ 이고, $b = -a = 4$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a - b = -4 - 4 = -8$ 이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 범위의 자연수 조건에서, 이차부등식과 배수 조건을 동시에 만족시키는 순서쌍의 개수를 체계적으로 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

a, b 는 1 이상 6 이하의 자연수이다. 주어진 부등식 $a^2 - 4a + b \leq 2$ 는 $b \leq -a^2 + 4a + 2$ 로 정리할 수 있다. 이 부등식과 b 가 a 의 배수라는 조건을 동시에 만족시키는 순서쌍을 찾아야 한다.

a 의 값에 따라 b 의 범위를 구하고, 그 범위 내에서 b 가 a 의 배수인 경우를 찾는다.

$a = 1$ 일 때, $b \leq -1 + 4 + 2 = 5$ 이다. b 는 1 의 배수이므로 $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이다. (5개)

$a = 2$ 일 때, $b \leq -4 + 8 + 2 = 6$ 이다. b 는 2 의 배수이므로 $b \in \{2, 4, 6\}$ 이다. (3개)

$a = 3$ 일 때, $b \leq -9 + 12 + 2 = 5$ 이다. b 는 3 의 배수이므로 $b = 3$ 이다. (1개)

$a = 4$ 일 때, $b \leq -16 + 16 + 2 = 2$ 이다. b 는 4 의 배수여야 하는데, $b \geq 4$ 이므로 해당하는 b 는 없다.

$a \geq 5$ 일 때, $-a^2 + 4a + 2 < 1$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 b 는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 총 개수는 $5 + 3 + 1 = 9$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 연립이차부등식의 해의 조건과 정수의 개수를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

$x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 에서 $(x + 2)(x - 4) \leq 0$ 이므로, 첫 번째 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 4$ 이다. $x^2 - (a + 1)x + a \leq 0$ 에서 $(x - 1)(x - a) \leq 0$ 이다.

두 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x 가 3개여야 한다.

- (i) $a < 1$ 일 때: 두 번째 부등식의 해는 $a \leq x \leq 1$ 이다. 두 부등식의 공통 범위는 $\max(-2, a) \leq x \leq 1$ 이다. 이 범위의 정수가 3개이려면 $-1, 0, 1$ 이어야 하므로, $-2 < a \leq -1$ 이어야 한다. 따라서 정수 a 의 값은 -1 이다.
- (ii) $a > 1$ 일 때: 두 번째 부등식의 해는 $1 \leq x \leq a$ 이다. 두 부등식의 공통 범위는 $1 \leq x \leq \min(4, a)$ 이다. 이 범위의 정수가 3개이려면 $1, 2, 3$ 이어야 하므로, $3 \leq \min(4, a) < 4$ 이어야 한다. 즉, $3 \leq a < 4$ 이므로 정수 a 의 값은 3 이다.
- (iii) $a = 1$ 일 때: 두 번째 부등식의 해는 $x = 1$ 이므로 공통 정수는 1개뿐이어서 조건을 만족하지 않는다.
- 따라서 가능한 모든 정수 a 의 값은 $-1, 3$ 이므로 그 합은 $-1 + 3 = 2$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식을 풀고, 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 연립방정식에서 $y = 1 - x$ 를 $x^2 + y^2 = 13$ 에 대입하면 $x^2 + (1 - x)^2 = 13$ 이다.

이 식을 정리하면 $x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$, $2x^2 - 2x - 12 = 0$, 즉 $x^2 - x - 6 = 0$ 을 얻는다.

이 이차방정식의 두 근이 α_1, α_2 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 \alpha_2 = -6$ 이다.

또한, $\beta_1 = 1 - \alpha_1$ 이고 $\beta_2 = 1 - \alpha_2$ 이므로 $\beta_1 \beta_2 = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 = 1 - 1 + (-6) = -6$ 이다.

따라서 구하는 값은 $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = -6 + (-6) = -12$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립방정식을 풀어 두 쌍의 해를 구하고, 문제의 조건에 맞는 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

주어진 연립방정식의 첫 번째 식을 $y = x + 1$ 로 변형하여 두 번째 식에 대입한다.

$$2x^2 - x(x + 1) - 6(x + 1) = -16$$

위 식을 정리하면 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 이므로 $(x - 2)(x - 5) = 0$ 이다.

따라서 해의 x 좌표는 $\alpha = 2$ 또는 $\alpha = 5$ 이다.

$\alpha = 2$ 일 때 $\beta = 2 + 1 = 3$ 이므로, 해는 $(2, 3)$ 이고 이때 $\alpha + \beta = 5$ 이다.

$\alpha = 5$ 일 때 $\beta = 5 + 1 = 6$ 이므로, 해는 $(5, 6)$ 이고 이때 $\alpha + \beta = 11$ 이다.

따라서 가능한 모든 $\alpha + \beta$ 값의 합은 $5 + 11 = 16$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식의 해와 정수 해의 개수 조건을 결합하여 미지수의 값을 구하는 문제 해결 능력을 평가한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 을 풀면 $(x - 4)(x + 2) \leq 0$ 이므로, 해는 $-2 \leq x \leq 4$ 이다. 이 범위의 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 로 총 7개이다.

두 번째 부등식 $x^2 - (k + 2)x + 2k > 0$ 을 풀면 $(x - 2)(x - k) > 0$ 이다. 정수 k 의 값의 범위를 기준으로 경우를 나눈다.

(i) $k < 2$ 일 때, 해는 $x < k$ 또는 $x > 2$ 이다. $-2 \leq x \leq 4$ 범위에서 $x > 2$ 를 만족시키는 정수는 $3, 4$ (2개)이다. 따라서 $x < k$ 를 만족시키는 정수가 3개여야 하므로, 이 정수들은 $-2, -1, 0$ 이어야 한다. 이를 만족시키는 k 의 범위는 $0 < k \leq 1$ 이므로 정수 k 는 1 이다.

(ii) $k > 2$ 일 때, 해는 $x < 2$ 또는 $x > k$ 이다. $-2 \leq x \leq 4$ 범위에서 $x < 2$ 를 만족시키는 정수는 $-2, -1, 0, 1$ (4개)이다. 따라서 $x > k$ 를 만족시키는 정수가 1개여야 하므로, 이 정수는 4 여야 한다. 이를 만족시키는 k 의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이므로 정수 k 는 3 이다.

(iii) $k = 2$ 일 때, 부등식은 $(x - 2)^2 > 0$ 이므로 해는 $x \neq 2$ 이다. 이 경우 $-2 \leq x \leq 4$ 범위의 정수 해는 6개이므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 가능한 정수 k 는 1 과 3 이므로, 모든 정수 k 의 값의 합은 $1 + 3 = 4$ 이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 매개변수를 포함한 연립이차부등식의 정수 해의 개수에 대한 조건을 이용하여 매개변수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 을 인수분해하면 $(x+2)(x-4) \leq 0$ 이므로, 해는 $-2 \leq x \leq 4$ 이다. 이 범위의 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 이다.

두 번째 부등식 $x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0$ 을 인수분해하면 $(x-a)(x-2) \leq 0$ 이다.

(i) $a < 2$ 일 때, 두 번째 부등식의 해는 $a \leq x \leq 2$ 이다.

두 부등식의 공통 범위를 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 그 해는 $\{0, 1, 2\}$ 이어야 한다.

이는 $-1 < a \leq 0$ 일 때 성립하므로, 정수 a 는 0 이다.

(ii) $a > 2$ 일 때, 두 번째 부등식의 해는 $2 \leq x \leq a$ 이다.

공통 범위를 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 그 해는 $\{2, 3, 4\}$ 이어야 한다.

이는 $4 \leq a < 5$ 일 때 성립하므로, 정수 a 는 4 이다.

(iii) $a = 2$ 일 때, 두 번째 부등식의 해는 $x = 2$ 뿐이므로, 공통 정수 해는 1개이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 a 의 값은 0, 4 이므로, 그 합은 $0 + 4 = 4$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 미지수를 포함한 행렬을 구하고, 그 행렬의 거듭제곱과 상수배 사이의 관계를 파악하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ 에서 $2B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - A$ 이다. 이를 $AB = O$ 에 대입하면 $A(\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - A) = 2O = O$ 이므로 $A\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = A^2$ 이다.

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -2 \end{pmatrix}$ 를 대입하여 양변의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분을 비교하면 각각 $2 = -a$, $9b - 10 = -b$ 이므로 $a = -2, b = 1$ 이다.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 이므로 $2B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 에서 $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

$B^2 = kB$ 를 만족시키는 상수 k 를 구하기 위해 B^2 를 계산하면 $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ 이고, 이는 $5\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5B$ 와 같다.

따라서 $B^2 = kB$ 를 만족시키는 상수 k 의 값은 5 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판별식을 이용하여 이해하고, 항등식의 성질을 활용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프와 직선 $y = 2kx - k^2 - 4$ 가 항상 접하므로, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 2kx - k^2 - 4$ 는 실수 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 가져야 한다.

이차방정식을 x 에 대하여 정리하면 $x^2 + (a - 2k)x + (b + k^2 + 4) = 0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면, $D = (a - 2k)^2 - 4(b + k^2 + 4) = 0$ 이 k 에 대한 항등식이어야 한다. 전개하여 정리하면

$(a^2 - 4ak + 4k^2) - (4b + 4k^2 + 16) = 0$ 이므로, $-4ak + (a^2 - 4b - 16) = 0$ 이다.

k 에 대한 항등식의 성질에 의해 모든 계수가 0 이어야 하므로, $-4a = 0$ 이고 $a^2 - 4b - 16 = 0$ 이다.

따라서 $a = 0$ 이고, 이를 대입하면 $0^2 - 4b - 16 = 0$ 에서 $b = -4$ 이다.

구하는 값은 $a + b = 0 + (-4) = -4$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 평행이동과 그래프의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구한다.

[풀이] 이차함수 $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ 의 꼭짓점은 $(1, -1)$ 이다. 이 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점은 $(1 + p, -1 + q)$ 이다. 조건 (가)에 의해 이 꼭짓점은 직선 $y = x - 5$ 위에 있으므로, $-1 + q = (1 + p) - 5$ 에서 $q = p - 3$ 을 얻는다.

$y = f(x) = (x - (1 + p))^2 - 1 + q$ 에 $q = p - 3$ 을 대입하면 $f(x) = (x - (p + 1))^2 + p - 4$ 이다. 조건 (나)에 의해 이 그래프는 직선 $y = -2x + 1$ 에 접하므로, 이차방정식 $(x - (p + 1))^2 + p - 4 = -2x + 1$ 은 중근을 가져야 한다. 식을 정리하면 $x^2 - 2px + p^2 + 3p - 4 = 0$ 이 되고, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D/4 = (-p)^2 - (p^2 + 3p - 4) = -3p + 4 = 0$ 이 성립한다.

따라서 $-3p + 4 = 0$ 에서 $p = \frac{4}{3}$ 이고, $q = p - 3 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$ 이다. 그러므로 구하는 값은

$$3(p - q) = 3\left(\frac{4}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{9}{3}\right) = 9 \text{ 이다.}$$

16. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 이차함수의 식을 구하고 함수값을 계산할 수 있다.

[풀이]

최고차항의 계수가 1인 이차함수를 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하자. 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$ 이다. 두 근의 역수의 합이 $1/2$ 이므로 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-a}{b} = \frac{1}{2}$ 에서 $b = -2a$ 이다. 한편, 방정식 $f(x) = -x - 1$, 즉 $x^2 + (a + 1)x + (b + 1) = 0$ 의 두 근의 합은 $-(a + 1)$ 이고 곱은 $b + 1$ 이다. 두 근의 합과 곱이 같으므로 $-(a + 1) = b + 1$ 에서 $b = -a - 2$ 이다.

두 관계식 $b = -2a$ 와 $b = -a - 2$ 를 연립하면 $-2a = -a - 2$ 이므로 $a = 2$ 이고, $b = -4$ 이다. 따라서 $f(x) = x^2 + 2x - 4$ 이다. 이때 방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식 $D = 2^2 - 4(1)(-4) = 20 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다는 조건을 만족시킨다.

따라서 구하는 값은 $f(5) = 5^2 + 2(5) - 4 = 25 + 10 - 4 = 31$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 꼭짓점 성질과 좌표평면 위 도형의 넓이를 이용하여 미정계수와 최댓값을 구한다.

[풀이]

점 P의 x좌표가 $-k$ 이므로 직선의 방정식에 대입하면

$$y = k(-k + a) = -k^2 + ak \text{ 이다.}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-k, -k^2 + ak)$ 이다.

점 P의 y좌표가 양수이므로

$$-k^2 + ak > 0 \text{ 이다.}$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } k < a \text{ 이다.}$$

사각형 PQOR의 넓이는 삼각형 OPQ와 삼각형 OPR의 넓이의 합이다. 따라서

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{2} \times 3 \times (-k^2 + ak) + \frac{1}{2} \times 2 \times k \\ &= -\frac{3}{2}k^2 + \left(\frac{3a}{2} + 1\right)k \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$S(k)$ 의 그래프는 위로 볼록한 포물선이므로 꼭짓점에서 최댓값을 갖는다. 꼭짓점의 k좌표는

$$\begin{aligned} k &= -\frac{\frac{3a}{2} + 1}{2(-\frac{3}{2})} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

$$k = 3$$

일 때 최댓값을 가지므로

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{3} = 3 \quad \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{16}{3} \quad \text{이다.}$$

최댓값 M 은

$$\begin{aligned} M = S(3) &= -\frac{3}{2} \times 9 + \left(\frac{3}{2} \times \frac{16}{3} + 1\right) \times 3 \\ &= -\frac{27}{2} + 27 = \frac{27}{2} \quad \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서

$$a + M = \frac{16}{3} + \frac{27}{2} = \frac{113}{6} \quad \text{이다.}$$

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차방정식의 근과 계수의 관계 및 켈레근의 성질을 이용하여 다항식의 계수를 결정할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[풀이]

$P(x)$ 는 실수 계수 삼차다항식이고, 조건 (나)에서 방정식 $P(x-2)=0$ 의 한 허근이 $3+i$ 이므로, $x=3+i$ 를 대입하면

$P(3+i-2)=P(1+i)=0$ 이다. 즉, $P(x)=0$ 의 한 허근은 $1+i$ 이고, 켈레근의 성질에 의해 다른 한 허근은 $1-i$ 이다.

$P(x)=0$ 의 두 허근이 $1+i, 1-i$ 이므로, $P(x)$ 는 이차식 $x^2 - ((1+i) + (1-i))x + (1+i)(1-i) = x^2 - 2x + 2$ 를 인수로 갖는다.

$P(x)=0$ 의 실근을 k 라 하면 $P(x) = (x-k)(x^2 - 2x + 2)$ 로 놓을 수 있다.

조건 (다)에서 $P(1)=10$ 이므로, $P(1) = (1-k)(1^2 - 2(1) + 2) = (1-k)(1) = 10$ 에서 $k = -9$ 이다. 따라서

$P(x) = (x+9)(x^2 - 2x + 2) = x^3 + 7x^2 - 16x + 18$ 이므로 $a=7, b=-16$ 이다. 구하는 값은 $a-b=7-(-16)=23$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 대칭축과 지정된 구간의 위치 관계에 따른 최댓값과 최솟값의 차이로 정의된 새로운 함수의 성질을 추론하여 함수값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = a(x-b)^2$ 의 그래프는 직선 $x=b$ 에 대하여 대칭이다. 함수 $g(k)$ 는 구간 $[k, k+2]$ 와 대칭축 $x=b$ 의 상대적 위치에 따라 결정되는데, $g(k)$ 의 그래프는 직선 $k=b-1$ 에 대하여 대칭이다. 조건 (가) $g(2)=g(4)$ 에서 함수 $g(k)$ 의 대칭축은 $k = \frac{2+4}{2} = 3$ 이다. 따라서 $b-1=3$ 이므로 $b=4$ 이다.

$f(x) = a(x-4)^2$ 이므로, 조건 (나) $g(1)+g(5)=48$ 을 이용하여 a 의 값을 구한다.

$k=1$ 일 때, 구간은 $[1, 3]$ 이고 대칭축 $x=4$ 는 구간의 오른쪽에 있으므로 $f(x)$ 는 감소한다. 따라서

$$g(1) = f(1) - f(3) = a(1-4)^2 - a(3-4)^2 = 9a - a = 8a \quad \text{이다.}$$

$k=5$ 일 때, 구간은 $[5, 7]$ 이고 대칭축 $x=4$ 는 구간의 왼쪽에 있으므로 $f(x)$ 는 증가한다. 따라서

$$g(5) = f(7) - f(5) = a(7-4)^2 - a(5-4)^2 = 9a - a = 8a \quad \text{이다.}$$

$$g(1) + g(5) = 8a + 8a = 16a = 48 \quad \text{에서 } a = 3 \quad \text{이다.}$$

$$a = 3, b = 4 \quad \text{이므로 } f(x) = 3(x-4)^2 \quad \text{이다. 따라서 구하는 값은 } f(7) = 3(7-4)^2 = 3 \times 3^2 = 27 \quad \text{이다.}$$

20. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질과 닮음을 이용하여 특정 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

세 점 $A(1, 6)$, $B(-5, 0)$, $C(7, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표는 $\left(\frac{1-5+7}{3}, \frac{6+0-2}{3}\right)$ 이므로

$$G\left(1, \frac{4}{3}\right) \quad \text{이다.}$$

삼각형 ABC 의 넓이는 신발끈 공식을 이용하여 구할 수 있다.

넓이

$$= \frac{1}{2} |(1 \cdot 0 + (-5) \cdot (-2) + 7 \cdot 6) - (6 \cdot (-5) + 0 \cdot 7 + (-2) \cdot 1)| = \frac{1}{2} |(0 + 10 + 42) - (-30 + 0 - 2)| = \frac{1}{2} |52 - (-32)| = \frac{1}{2} \cdot 84 = 42$$
 이다.

직선 DE 는 변 BC 에 평행하므로, 삼각형 ADE 와 삼각형 ABC 는 닮음이다. 무게중심 G 는 중선 AM (M 은 BC 의 중점)을 $2:1$ 로 내분하므로, 점 A 에서 직선 DE 에 내린 수선의 발과 직선 BC 에 내린 수선의 발까지의 거리의 비는 $2:3$ 이다. 따라서 삼각형 ADE 와 ABC 의 높이의 비는 $2:3$ 이고, 닮음비도 $2:3$ 이다.

두 닮은 삼각형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱이므로, 삼각형 ADE 의 넓이와 삼각형 ABC 의 넓이의 비는 $(2:3)^2 = 4:9$ 이다.

삼각형 ADE 의 넓이는 삼각형 ABC 의 넓이의 $\frac{4}{9}$ 배이므로, $42 \times \frac{4}{9} = \frac{56}{3}$ 이다.

따라서 사각형 $DBCE$ 의 넓이는 삼각형 ABC 의 넓이에서 삼각형 ADE 의 넓이를 뺀 값이므로, $42 - \frac{56}{3} = \frac{126-56}{3} = \frac{70}{3}$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 그래프와 방정식의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 함수 관계식을 추론하고, 함수의 대칭성을 이용하여 식의 값을 구하는 문항이다.

[풀이]

x 에 대한 방정식 $\{x - f(k)\}\{x - g(k)\} = 0$ 의 두 실근이 $0, -2$ 이므로, $\{f(k), g(k)\} = \{0, -2\}$ 이다. 이는 $f(k)g(k) = 0$ 이고 $f(k) + g(k) = -2$ 임을 의미한다. $h(x) = f(x) + g(x) + 2$ 라 하면, $h(x)$ 는 최대 이차식이다. 조건을 만족하는 k 는 방정식 $h(x) = 0$ 의 근 중에서 $f(x)g(x) = 0$ 을 만족하는 값이다. 만약 $h(x)$ 가 항등식이 아니라면 근이 최대 2개이므로, 실수 k 의 개수가 3이라는 조건 (가)에 따라 모든 실수 x 에 대해 $h(x) = 0$, 즉 $f(x) + g(x) = -2$ 가 성립해야 한다. $f(x)$ 의 이차항 계수를 a 라 하면 $g(x)$ 의 이차항 계수가 1이므로 $a + 1 = 0$ 에서 $a = -1$ 이다.

조건을 만족하는 k 의 값은 $f(k) = 0$ 또는 $f(k) = -2$ 를 만족하는 x 좌표이다. k 의 개수가 3개이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하며 직선 $y = 0$ 또는 $y = -2$ 에 접해야 한다. 즉, $f(x)$ 의 최댓값은 0 또는 -2 이다. $y = f(x)$ 의 대칭축이 $x = p$ 이고 최댓값을 q 라 하면 $f(x) = -(x - p)^2 + q$ 이다. 이때 $g(x) = -f(x) - 2 = (x - p)^2 - q - 2$ 이므로 $g(x)$ 의 최솟값은 $-q - 2$ 이다. 조건 (나)에서 $g(x)$ 의 최솟값이 -2 이므로 $-q - 2 = -2$ 에서 $q = 0$ 이다.

따라서 $f(x) = -(x - p)^2$ 이고 $g(x) = (x - p)^2 - 2$ 이다. 구하는 값은 $g(p + 1) + f(p - 1)$ 이므로 $g(p + 1) = ((p + 1) - p)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ 이고, $f(p - 1) = -((p - 1) - p)^2 = -(-1)^2 = -1$ 이다. 그러므로 $g(p + 1) + f(p - 1) = -1 + (-1) = -2$ 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 5

[출제의도] 순열과 조합의 정의를 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 등식은 ${}_nP_2 + {}_5C_3 = 2 \times {}_{n+1}C_2$ 이고, n 은 $n \geq 2$ 인 자연수이다.

순열과 조합의 정의에 따라 각 항을 계산하면 ${}_nP_2 = n(n - 1)$, ${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$, ${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n + 1)}{2}$ 이다.

따라서 주어진 등식은 $n(n - 1) + 10 = 2 \times \frac{n(n + 1)}{2}$ 이고, 이를 정리하면 $n^2 - n + 10 = n^2 + n$ 이다.

$2n = 10$ 이므로, 구하는 자연수 n 의 값은 5이다.

23. 정답 및 풀이

정답: 8

[출제의도] 이차부등식과 절댓값을 포함한 부등식의 해의 성질을 이용하여 미지수의 값을 추론할 수 있다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - 8x + 12 \leq 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) \leq 0$ 이므로, 이를 만족시키는 정수 x 의 집합은 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 이다.

두 번째 부등식 $|x - a| > 1$ 의 해는 $x < a - 1$ 또는 $x > a + 1$ 이다. a 가 정수이므로 이 부등식을 만족시키지 않는 정수 x 의 집합은 $B = \{a - 1, a, a + 1\}$ 이다.

연립부등식의 정수 해의 집합은 $A - B$ 이고, 그 개수가 3이 되어야 하므로 $n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 5 - 3 = 2$ 이다.

즉, 집합 A 의 원소 중 두 개만이 집합 B 에 속해야 한다.

(i) $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때: 집합 B 는 2, 3 을 포함하고 4 는 포함하지 않아야 한다. $a - 1 \leq 2$ 이고 $a + 1 \geq 3$ 이며 $a - 1 > 1$ 이거나 $a + 1 < 4$ 여야 한다. 즉 $a \geq 2$ 이고 $a \leq 3$ 인데, $a = 3$ 이면 $B = \{2, 3, 4\}$ 이므로 $A \cap B = \{2, 3, 4\}$ 가 되어 모순이다. 따라서 $a = 2$ 이고, 이때 $B = \{1, 2, 3\}$ 이므로 $A \cap B = \{2, 3\}$ 이 되어 조건을 만족한다.

(ii) $A \cap B = \{5, 6\}$ 일 때: 집합 B 는 5, 6 을 포함하고 4 는 포함하지 않아야 한다. $a - 1 \leq 5$ 이고 $a + 1 \geq 6$ 이며 $a - 1 > 4$ 여야 한다. 즉 $a \geq 5$ 이고 $a \leq 6$ 인데, $a = 5$ 이면 $B = \{4, 5, 6\}$ 이므로 $A \cap B = \{4, 5, 6\}$ 가 되어 모순이다. 따라서 $a = 6$ 이고, 이때 $B = \{5, 6, 7\}$ 이므로 $A \cap B = \{5, 6\}$ 이 되어 조건을 만족한다.

(i), (ii) 이외의 경우 $A \cap B$ 의 원소 개수가 2가 될 수 없으므로, 가능한 모든 정수 a 의 값은 2, 6 이고 그 합은 $2 + 6 = 8$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 이차부등식이 모든 실수에 대해 항상 성립할 조건을 판별식을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 이차부등식 $x^2 - 2kx + k + 12 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하기 위해서는, 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k + 12$ 의 그래프가 x 축보다 항상 위쪽에 있어야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2 - 2kx + k + 12 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식 $D < 0$ 이어야 한다.

이차방정식의 판별식을 D 라 하면, $D/4 = (-k)^2 - 1 \cdot (k + 12) = k^2 - k - 12$ 이다.

$D/4 < 0$ 이므로 $k^2 - k - 12 < 0$, 즉 $(k - 4)(k + 3) < 0$ 이다. 이 부등식을 풀면 $-3 < k < 4$ 이다.

따라서 이 범위를 만족시키는 정수 k 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 으로 총 6개이다.

25. 정답 및 풀이

정답: 7

[출제의도] 나머지정리와 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 다항식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $P(x)$ 를 $P(x) = x^2 + ax + b$ 라 하자. 다항식 $P(x) - 1$ 이 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의해 $P(2) - 1 = 0$, 즉 $P(2) = 1$ 이다.

방정식 $P(x) = x + 2$ 를 정리하면 $x^2 + (a - 1)x + (b - 2) = 0$ 이다. 두 근의 합이 4이므로 근과 계수의 관계에 의해 $-(a - 1) = 4$, 즉 $a = -3$ 이다.

$P(x) = x^2 - 3x + b$ 에 $P(2) = 1$ 을 대입하면 $2^2 - 3(2) + b = 1$ 이므로 $b = 3$ 이다. 그러므로 $P(x) = x^2 - 3x + 3$ 이다.

$P(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $P(4)$ 와 같다.

따라서 구하는 나머지는 $P(4) = 4^2 - 3(4) + 3 = 16 - 12 + 3 = 7$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: 16

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 여러 개의 로그 값을 비교하고, 주어진 등차수열 조건을 활용하여 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

$x = \log_2 a$ 라 하자. 조건 $1 < a < \sqrt[4]{2}$ 에서 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면 $\log_2 1 < \log_2 a < \log_2 2^{1/4}$, 즉 $0 < x < 1/4$ 이다. 집합 B 의 원소를 x 로 나타내면 $B = \{2x, 1 - 2x, -x, 1 - x\}$ 이다. $0 < x < 1/4$ 범위에서 네 원소의 대소를 비교하면, $-x$ 는 유일한 음수이므로 가장 작다. 양수인 $2x, 1 - 2x, 1 - x$ 에 대하여 $4x < 1$ 이므로 $2x < 1 - 2x$ 이고, $3x < 1$ 이므로 $2x < 1 - x$ 이다. 또한 $-2x < -x$ 이므로 $1 - 2x < 1 - x$ 이다. 따라서 $-x < 2x < 1 - 2x < 1 - x$ 이다.

조건 (가) $p < q < r < s$ 에 따라 각 값을 대응시키면 $p = -x$, $q = 2x$, $r = 1 - 2x$, $s = 1 - x$ 이다. 세 수 q, r, s 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의해 $2r = q + s$ 이다. 즉, $2(1 - 2x) = 2x + (1 - x)$ 이다.

위 식을 정리하면 $2 - 4x = x + 1$ 에서 $5x = 1$ 이므로 $x = 1/5$ 이다. 이 값은 $0 < x < 1/4$ 를 만족한다. $x = \log_2 a = 1/5$ 이므로 $a = 2^{1/5}$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a^{20} = (2^{1/5})^{20} = 2^4 = 16$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지정리에 대한 성질을 종합적으로 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항식의 함숫값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

일차다항식 $Q(x)$ 에 대하여 $Q(\alpha) = 0$ 인 α 가 존재한다. 조건 (나)에서 나머지정리에 의해 $P(\alpha) = 5$ 이다. 조건 (가)의 등식에 $x = \alpha$ 를 대입하면, $P(\alpha) + (\alpha - 3)Q(\alpha) = 2\alpha^2 - 8\alpha + 13$ 이다.

$P(\alpha) = 5$ 이고 $Q(\alpha) = 0$ 이므로 $5 = 2\alpha^2 - 8\alpha + 13$ 이고, 이를 정리하면 $2\alpha^2 - 8\alpha + 8 = 0$, 즉 $2(\alpha - 2)^2 = 0$ 이므로 $\alpha = 2$ 이다. $Q(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 가지므로 $Q(x) = k(x - 2)$ (k 는 0 이 아닌 상수)로 놓을 수 있다. $Q(1) = -1$ 이므로 $k(1 - 2) = -1$ 에서 $k = 1$ 이다. 따라서 $Q(x) = x - 2$ 이다.

$Q(x) = x - 2$ 를 조건 (가)에 대입하여 $P(x)$ 를 구하면 $P(x) + (x - 3)(x - 2) = 2x^2 - 8x + 13$ 이므로,

$P(x) = (2x^2 - 8x + 13) - (x^2 - 5x + 6) = x^2 - 3x + 7$ 이다. 따라서 $P(4) = 4^2 - 3(4) + 7 = 11$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: 24

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 교점, 삼각형의 넓이를 이용하여 주어진 범위에서 이차식의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 에서 $(x + 1)(x - 3) = 0$ 이므로 $x = -1$ 또는 $x = 3$ 이다. 따라서 A $(-1, 0)$, B $(3, 0)$ 이다.

점 A $(-1, 0)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = m(x + 1)$ 이다. 이 직선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점 P의 x 좌표를 구하기 위해 $x^2 - 2x - 3 = m(x + 1)$ 을 풀면, $(x + 1)(x - 3) = m(x + 1)$ 에서 $(x + 1)(x - 3 - m) = 0$ 이다. 점 P는 점 A가 아니므로 x 좌표는 $m + 3$ 이다. 점 P의 좌표는 $(m + 3, m(m + 4))$ 이고, 점 P'의 좌표는 $(m + 3, 0)$ 이다. 삼각형 BPP'의 넓이 S_1 은

$$\frac{1}{2} \times \overline{BP'} \times |y_P| = \frac{1}{2} |(m + 3) - 3| \times |m(m + 4)| = \frac{1}{2} m \cdot m(m + 4) = \frac{1}{2} m^2(m + 4) \text{ 이다.}$$

점 B $(3, 0)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = m(x - 3)$ 이다. 이 직선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점 Q의 x 좌표를 구하기 위해 $x^2 - 2x - 3 = m(x - 3)$ 을 풀면, $(x + 1)(x - 3) = m(x - 3)$ 에서 $(x - 3)(x + 1 - m) = 0$ 이다. 점 Q는 점 B가 아니므로 x 좌표는 $m - 1$ 이다. 점 Q의 좌표는 $(m - 1, m(m - 4))$ 이고, 점 Q'의 좌표는 $(m - 1, 0)$ 이다. $0 < m < 4$ 이므로 $y_Q < 0$ 이다. 삼각형 BQQ'의 넓이 S_2 는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BQ'} \times |y_Q| = \frac{1}{2} |(m - 1) - 3| \times |m(m - 4)| = \frac{1}{2} |m - 4| \times (-m(m - 4)) = \frac{1}{2} (4 - m) \cdot m(4 - m) = \frac{1}{2} m(4 - m)^2 \text{ 이다.}$$

$S_2 - S_1 = \frac{1}{2} m(4 - m)^2 - \frac{1}{2} m^2(m + 4) = \frac{m}{2} \{ (16 - 8m + m^2) - m(m + 4) \} = \frac{m}{2} (16 - 8m + m^2 - m^2 - 4m) = \frac{m}{2} (16 - 12m) = -6m^2 + 8m$ 이다. 함수 $g(m) = -6m^2 + 8m$ 이라 하면, $g(m) = -6(m - \frac{2}{3})^2 + \frac{8}{3}$ 이다. $0 < m < 4$ 의 범위에서 $m = \frac{2}{3}$ 일 때 최댓값 $\frac{8}{3}$ 을 갖는다. 따라서 $\frac{q}{p} = \frac{8}{3}$ 이므로 $p = 3, q = 8$ 이다.

최종적으로 구하는 값은 $p \times q = 3 \times 8 = 24$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 제한된 범위에서 꼭짓점의 위치에 따라 달라지는 이차함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 함수의 식을 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

함수 $f(x) = (x - p)^2 + q$ 는 꼭짓점의 x좌표가 p 인 아래로 볼록한 이차함수이다. 정수 p 의 위치에 따라 최댓값과 최솟값이 결정된다.

먼저 조건 (나)에서 $0 \leq x \leq 4$ 에서의 최댓값을 M_2 , 최솟값을 m_2 라 하자. p 의 값의 범위를 나누어 생각할 수 있다.

1. $0 \leq p \leq 4$ 인 경우: 최솟값 $m_2 = f(p) = q$ 이다. 최댓값 M_2 는 양 끝값인 $f(0)$ 또는 $f(4)$ 중 하나이다. 즉,
 $M_2 = \max(f(0), f(4)) = \max((0-p)^2 + q, (4-p)^2 + q)$ 이다. $M_2 - m_2 = \max(p^2, (4-p)^2) = 16$ 이다. p 가 정수이므로 $p^2 = 16$ 또는 $(p-4)^2 = 16$ 이어야 한다. 이를 만족하는 p 는 $p = 0$ 또는 $p = 4$ 이다.

2. $p < 0$ 인 경우: $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $m_2 = f(0) = p^2 + q$, $M_2 = f(4) = (4-p)^2 + q$ 이다.
 $M_2 - m_2 = (4-p)^2 - p^2 = 16 - 8p = 16$ 이므로 $p = 0$ 이다. 이는 $p < 0$ 이라는 가정에 모순이다.

3. $p > 4$ 인 경우: $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $m_2 = f(4) = (4-p)^2 + q$, $M_2 = f(0) = p^2 + q$ 이다.
 $M_2 - m_2 = p^2 - (4-p)^2 = 8p - 16 = 16$ 이므로 $p = 4$ 이다. 이는 $p > 4$ 라는 가정에 모순이다.

따라서 가능한 p 의 값은 0 또는 4 이다.

다음으로 조건 (가)를 이용하여 p 의 값을 확정한다. $-2 \leq x \leq 2$ 에서의 최댓값을 M_1 , 최솟값을 m_1 이라 하자.

1. $p = 0$ 인 경우: $-2 \leq x \leq 2$ 에서 꼭짓점 $x = 0$ 이 포함된다. $m_1 = f(0) = q$ 이고, $M_1 = f(-2) = f(2) = 4 + q$ 이다.
 $M_1 + m_1 = (4 + q) + q = 22$ 에서 $2q = 18$, $q = 9$ 이다. $q > 0$ 이므로 이 값은 유효하다.

2. $p = 4$ 인 경우: $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다. $m_1 = f(2) = (2-4)^2 + q = 4 + q$ 이고,
 $M_1 = f(-2) = (-2-4)^2 + q = 36 + q$ 이다. $M_1 + m_1 = (36 + q) + (4 + q) = 22$ 에서 $2q = -18$, $q = -9$ 이다. 이는 $q > 0$ 이라는 조건에 위배된다.

따라서 $p = 0, q = 9$ 이므로 $f(x) = x^2 + 9$ 이다.

$f(6) = 6^2 + 9 = 36 + 9 = 45$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 59

[출제 의도] 원의 평행이동과 좌표축 동시 접선 조건을 이차함수와 직선의 관계로 변환하고, 주어진 조건들을 종합하여 이차함수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원의 중심을 $(t, f(t))$ 라 하자. 평행이동한 원의 중심은 $(t + m, f(t) + m)$ 이고, 이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위한 조건은 $|t + m| = |f(t) + m| = R$ 이다. 이로부터 $f(t) - t = 0$ 또는 $f(t) - t = \pm 2R$ 임을 알 수 있다. $g(x) = f(x) - x$ 라 하면, 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 세 직선 $y = 0, y = 2R, y = -2R$ 의 교점의 x 좌표가 총 3개라는 의미이다. 이는 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하고, $R > 0$ 이므로 $y = g(x)$ 가 아래로 볼록하면서 $y = 2R$ 과 두 점에서 만나거나 위로 볼록하면서 $y = -2R$ 과 두 점에서 만나는 경우이다. 두 경우 모두 $g(x) = a(x-p)^2$ 꼴로 나타낼 수 있다.

$g(x) = 0$ 의 중근이 $x_2 = p$ 이고, 다른 두 근 x_1, x_3 는 $x = p$ 에 대해 대칭이다. 조건에서 $x_1 + x_3 = 6$ 이므로 $2p = 6$, 즉 $p = 3$ 이다. 또한 $x_3 - x_1 = 8$ 이므로 두 근은 p 로부터의 거리가 4 인 $x_1 = -1, x_3 = 7$ 이다.

$f(x) = g(x) + x = a(x-3)^2 + x = ax^2 + (1-6a)x + 9a$ 이다. 직선 $y = 7x - 27$ 이 $y = f(x)$ 의 그래프에 접하므로, 이차방정식 $ax^2 + (1-6a)x + 9a = 7x - 27$ 즉, $ax^2 - (6+6a)x + (9a+27) = 0$ 의 판별식 D 는 0이다.

$D = (6+6a)^2 - 4a(9a+27) = 36(1+a)^2 - 36a^2 - 108a = 36(1+2a+a^2) - 36a^2 - 108a = 36 + 72a - 108a = 36 - 36a = 0$ 에서 $a = 1$ 을 얻는다.

$a = 1$ 이므로 $f(x) = (x-3)^2 + x = x^2 - 5x + 9$ 이다. 따라서 구하는 값은 $f(10) = 10^2 - 5(10) + 9 = 59$ 이다.