

MathGenix 2026년 고1 9월 모의고사 대비 시험 04 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2609-04-SOL

출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
①	③	①	③	③	③	④	③	②	④
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
⑤	④	③	③	④	②	④	⑤	③	⑤
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
④	8	③	32	20	103	4	④	③	③

1. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 연립방정식의 풀이를 이용하여 두 다항식을 구하고, 이를 통해 다항식의 덧셈과 뺄셈 및 실수배 연산을 수행할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 두 식 $X - Y = 2x^2 - 4xy + 4y^2 \dots \text{㉠}$ 과 $2X + Y = 4x^2 + xy + 5y^2 \dots \text{㉡}$ 을 연립하여 푼다.

두 식 ㉠과 ㉡을 변끼리 더하면 $3X = (2x^2 - 4xy + 4y^2) + (4x^2 + xy + 5y^2) = 6x^2 - 3xy + 9y^2$ 이므로, $X = 2x^2 - xy + 3y^2$ 이다. 이 식을 ㉠에 대입하면 $Y = X - (2x^2 - 4xy + 4y^2) = (2x^2 - xy + 3y^2) - (2x^2 - 4xy + 4y^2) = 3xy - y^2$ 이다.

따라서 구하는 다항식 $3X - 2Y$ 는 $3(2x^2 - xy + 3y^2) - 2(3xy - y^2) = (6x^2 - 3xy + 9y^2) - (6xy - 2y^2) = 6x^2 - 9xy + 11y^2$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구하고, 이를 이용해 다항식의 계수의 총합을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식 $(x - 1)(x + a) = x^2 + 3x + b$ 가 x 에 대한 항등식이므로, 양변의 동류항의 계수는 서로 같습니다. 좌변을 전개하면 $x^2 + (a - 1)x - a$ 입니다.

양변의 계수를 비교하면 x 의 계수에서 $a - 1 = 3$ 이므로 $a = 4$ 이고, 상수항에서 $-a = b$ 이므로 $b = -4$ 입니다.

따라서 다항식 $Q(x) = (4 - 1)x^2 - 4x + (4 - 4) = 3x^2 - 4x$ 이고, 다항식의 모든 계수의 합은 $Q(1)$ 의 값과 같으므로 $Q(1) = 3(1)^2 - 4(1) = 3 - 4 = -1$ 입니다.

3. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 이차방정식의 근과 복소수의 거듭제곱의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가하는 문항입니다. 원본 문항의 복소수 사칙연산 개념을 이차방정식의 근의 공식과 연결하여 한 단계의 추론 과정을 추가하였습니다.

[풀이]

이차방정식 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 에 근의 공식을 적용하면,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

따라서 두 근 α, β 는 $1 + i$ 와 $1 - i$ 입니다.

$$\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$$

라고 하면 (α 와 β 의 순서를 바꾸어 놓아도 결과는 같습니다),

$$\alpha - 1 = (1 + i) - 1 = i$$

$$\beta - 1 = (1 - i) - 1 = -i$$

구하고자 하는 식의 값은 $(\alpha - 1)^{10} + (\beta - 1)^{10} = i^{10} + (-i)^{10}$ 입니다.

복소수 i 의 거듭제곱의 성질에 따라 $i^2 = -1, i^4 = 1$ 이므로,

$$i^{10} = (i^4)^2 \cdot i^2 = 1^2 \cdot (-1) = -1$$

$$\text{또한, } (-i)^{10} = ((-1) \cdot i)^{10} = (-1)^{10} \cdot i^{10} = 1 \cdot i^{10} = -1 \text{ 입니다.}$$

$$\text{따라서, } i^{10} + (-i)^{10} = (-1) + (-1) = -2 \text{ 입니다.}$$

정답은 ①번입니다.

4. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 점의 내분점 공식과 두 점 사이의 거리 공식을 활용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

두 점 $A(-1, a)$, $B(5, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:1 로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)}{2+1}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot a}{2+1}\right), \text{ 즉 } P\left(3, \frac{a+2}{3}\right) \text{ 이다.}$$

원점 $O(0, 0)$ 과 점 P 사이의 거리가 5 이므로, $\overline{OP}^2 = 5^2$ 이다.

$$3^2 + \left(\frac{a+2}{3}\right)^2 = 25 \text{ 이므로, } \frac{(a+2)^2}{9} = 16 \text{ 이고, } (a+2)^2 = 144 \text{ 이다.}$$

$$a+2=12 \text{ 또는 } a+2=-12 \text{ 이므로, } a=10 \text{ 또는 } a=-14 \text{ 이다.}$$

문제에서 양수 a 의 값을 구하라고 하였으므로, 구하는 값은 10 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 복소수의 사칙연산과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 연계하여 식의 값을 구하는 문항을 출제한다.

[풀이]

주어진 등식 $z(2+i)=10$ 에서 복소수 z 를 구하면 $z = \frac{10}{2+i}$ 이다.

$$\text{분모를 실수화하면 } z = \frac{10(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10(2-i)}{4-i^2} = \frac{10(2-i)}{5} = 4-2i \text{ 이다.}$$

이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 계수 p, q 가 실수이고 한 근이 $z = 4-2i$ 이므로, 다른 한 근은 켤레복소수인 $\bar{z} = 4+2i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 따라 두 근의 합은 $-p = (4-2i) + (4+2i) = 8$ 이므로 $p = -8$ 이다.

$$\text{두 근의 곱은 } q = (4-2i)(4+2i) = 16 - (2i)^2 = 16 + 4 = 20 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 구하는 값은 } p+q = -8+20 = 12 \text{ 이다.}$$

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식의 해와 계수의 관계를 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해와 연결하여 해결하는 능력을 평가한다.

[풀이]

이차부등식 $x^2 + ax + b \leq 0$ 의 해가 $3 \leq x \leq 5$ 이므로, 이 부등식은 $(x-3)(x-5) \leq 0$ 과 같다.

위 식을 전개하면 $x^2 - 8x + 15 \leq 0$ 이므로, 계수를 비교하면 $a = -8, b = 15$ 이다.

또한, 부등식 $|x-c| \leq d$ ($d > 0$) 의 해는 $-d \leq x-c \leq d$, 즉 $c-d \leq x \leq c+d$ 이다.

이 해가 $3 \leq x \leq 5$ 와 일치해야 하므로, 연립방정식 $c-d=3, c+d=5$ 를 풀면 $c=4, d=1$ 이다.

$$\text{따라서 구하는 값은 } a+b+c+d = -8+15+4+1 = 12 \text{ 이다.}$$

7. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

이차방정식 $x^2 - (k-2)x - k + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = k - 2$, $\alpha\beta = -k + 1$ 이다.

서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식 $D = (-(k-2))^2 - 4(-k+1) = k^2 > 0$ 에서 $k \neq 0$ 이다.

곱셈 공식을 이용하여 $\alpha^2 + \beta^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내면, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (k-2)^2 - 2(-k+1) = k^2 - 2k + 2$ 이다.

주어진 조건 $\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta) = 14$ 에 위 식들을 대입하면 $(k^2 - 2k + 2) - (k - 2) = 14$ 가 성립한다.

이 식을 정리하면 $k^2 - 3k - 10 = 0$ 이므로 $(k-5)(k+2) = 0$ 이다. k 는 양수라는 조건에 따라 $k = 5$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 켈레복소수의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

이차방정식 $x^2 - 4x + 7 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 7$ 이다.

이차방정식의 계수가 모두 실수이고 판별식 $D/4 = (-2)^2 - 7 = -3 < 0$ 이므로, 두 근 α, β 는 서로 켈레복소수 관계이다. 즉, $\beta = \bar{\alpha}$ 이다.

구하는 값은 $|P(\alpha)|^2 = |\alpha - 1|^2$ 이고, 복소수의 성질에 의해 $|\alpha - 1|^2 = (\alpha - 1)(\overline{\alpha - 1}) = (\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)$ 이다.

따라서 주어진 식의 값은 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 7 - 4 + 1 = 4$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 공통부분이 있는 사차식을 인수분해하고 항등식의 성질을 이용하여 다항식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$P(x) = x(x-4)(x^2 - 4x + 7) + 12$ 에서 공통부분인 $x^2 - 4x = t$ 로 치환하면, 주어진 식은 $t(t+7) + 12$ 가 된다.

이 식을 전개하여 인수분해하면 $t^2 + 7t + 12 = (t+3)(t+4)$ 이고, 다시 $t = x^2 - 4x$ 를 대입하면 $P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4x + 4)$ 이다.

각 이차식을 인수분해하면 $P(x) = (x-1)(x-3)(x-2)^2$ 이다.

문제의 조건 $P(x) = (x-a)^2 Q(x)$ 와 비교하면, $(x-a)^2 = (x-2)^2$ 이고 $Q(x) = (x-1)(x-3)$ 임을 알 수 있다. 따라서 $a = 2$ 이고,

구하는 값은 $Q(a) = Q(2)$ 이다. $Q(2) = (2-1)(2-3) = 1 \times (-1) = -1$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 두 직선의 수직 조건과 선분의 중점 조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 선분 AB 의 수직이등분선 $y = 2x - 1$ 은 선분 AB 와 수직이며 그 중점을 지닙니다. 직선 $y = 2x - 1$ 의 기울기는 2 이므로, 직선 AB 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 입니다. 즉, $\frac{3-a}{b-1} = -\frac{1}{2}$ 에서 $2(3-a) = -(b-1)$ 이므로 $b - 2a = -5$ 입니다. 또한, 선분 AB 의 중점

$(\frac{1+b}{2}, \frac{a+3}{2})$ 은 직선 $y = 2x - 1$ 위의 점이므로, $\frac{a+3}{2} = 2(\frac{1+b}{2}) - 1$ 이 성립합니다. 이 식을 정리하면 $a + 3 = 2(1+b) - 2 = 2b$

이므로 $a - 2b = -3$ 입니다. 두 식 $b - 2a = -5$ 와 $a - 2b = -3$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{13}{3}$, $b = \frac{11}{3}$ 을 얻습니다. 따라서

$a + b = \frac{13}{3} + \frac{11}{3} = \frac{24}{3} = 8$ 입니다.

11. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 이차함수의 꼭짓점과 원의 중심의 좌표를 구하고, 점이 도형 위에 있을 조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

이차함수 $y = x^2 + a$ 의 꼭짓점 A의 좌표는 $(0, a)$ 이다. 원 $x^2 + y^2 + bx - 8y + 15 = 0$ 을 표준형으로 바꾸면

$$(x + \frac{b}{2})^2 + (y - 4)^2 = \frac{b^2}{4} + 1 \quad \text{이므로, 중심 C의 좌표는 } (-\frac{b}{2}, 4) \quad \text{이다.}$$

점 C $(-\frac{b}{2}, 4)$ 가 이차함수 $y = x^2 + a$ 의 그래프 위에 있으므로, $4 = (-\frac{b}{2})^2 + a$ 에서 $4 = \frac{b^2}{4} + a$ 이다.

점 A $(0, a)$ 가 원 $x^2 + y^2 + bx - 8y + 15 = 0$ 위에 있으므로, $0^2 + a^2 + b(0) - 8a + 15 = 0$ 에서 $a^2 - 8a + 15 = 0$ 이다. 이 이차방정식을 풀면 $(a - 3)(a - 5) = 0$ 이므로 $a = 3$ 또는 $a = 5$ 이다.

(i) $a = 3$ 일 때, $4 = \frac{b^2}{4} + 3$ 에서 $\frac{b^2}{4} = 1$, 즉 $b^2 = 4$ 이다. 조건에서 $b < 0$ 이므로 $b = -2$ 이다.

(ii) $a = 5$ 일 때, $4 = \frac{b^2}{4} + 5$ 에서 $\frac{b^2}{4} = -1$, 즉 $b^2 = -4$ 이다. 이를 만족시키는 실수 b 는 존재하지 않는다.

따라서 $a = 3, b = -2$ 이므로, 구하는 값은 $a - b = 3 - (-2) = 5$ 이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 주어진 자료를 분석하고 실생활 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

[풀이]

핵심 조건 정리 → 행렬 P 는 학교별, 성별 학생 수를, 행렬 Q 는 성별, 악기별 학생 비율을 나타낸다. 따라서 두 행렬의 곱 PQ 는 학교별, 악기별 학생 수를 나타내는 행렬이 된다.

필요한 식 전개 → 행렬 PQ 를 계산하면 다음과 같다.

$$PQ = \begin{pmatrix} 120 & 160 \\ 130 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120(0.2) + 160(0.7) & 120(0.8) + 160(0.3) \\ 130(0.2) + 140(0.7) & 130(0.8) + 140(0.3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 & 144 \\ 124 & 146 \end{pmatrix}$$

행렬 PQ 의 1열의 합은 피아노를 배우는 전체 학생 수를, 2열의 합은 드럼을 배우는 전체 학생 수를 의미한다.

피아노를 배우는 전체 학생 수: $136 + 124 = 260$ 명

드럼을 배우는 전체 학생 수: $144 + 146 = 290$ 명

정답 도출 → 두 고등학교에서 피아노를 배우는 전체 학생 수와 드럼을 배우는 전체 학생 수의 차는 $|260 - 290| = 30$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 점으로부터 같은 거리에 있는 직선의 성질을 이해하고, 점과 직선 사이의 거리 공식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

직선 l 이 두 점 $A(2, 6)$, $B(4, 2)$ 로부터 같은 거리에 있으므로, 직선 l 은 선분 AB 의 중점을 지나거나 직선 AB 와 평행해야 한다.

경우 1: 직선 l 이 선분 AB 의 중점 M 을 지나는 경우

선분 AB 의 중점 M 의 좌표는 $(\frac{2+4}{2}, \frac{6+2}{2}) = (3, 4)$ 이다. 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은 $y - 4 = m(x - 3)$, 즉 $mx - y - 3m + 4 = 0$ 이다. 원점과 직선 l 사이의 거리가 2 이므로 $\frac{|-3m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2$ 이다. 식을 정리하면 $(4 - 3m)^2 = 4(m^2 + 1)$, $9m^2 - 24m + 16 = 4m^2 + 4$, $5m^2 - 24m + 12 = 0$ 이다. 이 이차방정식의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{24}{5}$ 이다.

경우 2: 직선 l 이 직선 AB 와 평행한 경우

직선 AB 의 기울기는 $\frac{2-6}{4-2} = -2$ 이므로, 직선 l 의 기울기는 -2 이다. 직선 l 의 방정식을 $y = -2x + c$, 즉 $2x + y - c = 0$ 이라 할 수 있다. 원점과 직선 l 사이의 거리가 2 이므로 $\frac{|-c|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2$ 에서 $|c| = 2\sqrt{5}$ 이다. 조건을 만족하는 직선이 존재하므로 이 경우의 기울기는 -2 이다.

따라서 가능한 모든 기울기의 합은 $\frac{24}{5} + (-2) = \frac{14}{5}$ 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 직선과 정사각형의 기하학적 성질을 이용하여 미지수의 좌표를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이] 정사각형의 한 변 BC가 직선 $l: 2x + y - 10 = 0$ 위에 있으므로, 변 AB는 직선 l 에 수직이다. 직선 l 의 기울기는 -2 이므로 직선 AB의 기울기는 $1/2$ 이다. 또한, 정사각형의 대각선 BD와 한 변 BC가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

대각선 BD는 원점을 지나므로 방정식을 $y = mx$ 라 할 수 있다. 이 직선과 기울기가 -2 인 직선 l 이 이루는 각이 45° 이므로 다음이 성립한다.

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{m - (-2)}{1 + m(-2)} \right| = \left| \frac{m + 2}{1 - 2m} \right| = 1$$

$$m + 2 = \pm(1 - 2m) \quad \text{이므로, } m = -\frac{1}{3} \quad \text{또는 } m = 3 \quad \text{이다.}$$

점 B는 직선 l 과 직선 BD의 교점이므로 각 경우의 좌표를 구한다.

(i) 직선 BD가 $y = -\frac{1}{3}x$ 일 때, $2x + y - 10 = 0$ 과 연립하면 $B(6, -2)$ 이다.

(ii) 직선 BD가 $y = 3x$ 일 때, $2x + y - 10 = 0$ 과 연립하면 $B(2, 6)$ 이다.

점 A $(a, 5)$ 와 점 B를 잇는 직선 AB의 기울기가 $1/2$ 이어야 한다.

(i) B $(6, -2)$ 일 때, 기울기 $\frac{5 - (-2)}{a - 6} = \frac{7}{a - 6} = \frac{1}{2}$ 에서 $14 = a - 6$ 이므로 $a = 20$ 이다. ($a > 0$ 만족)

(ii) B $(2, 6)$ 일 때, 기울기 $\frac{5 - 6}{a - 2} = \frac{-1}{a - 2} = \frac{1}{2}$ 에서 $-2 = a - 2$ 이므로 $a = 0$ 이다. ($a > 0$ 불만족)

따라서 구하는 a 의 값은 20 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식의 미정계수를 구하고, 나머지정리를 이용하여 다항식의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

두 다항식 $P(x), Q(x)$ 가 모두 $x + b$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의해 $P(-b) = 0, Q(-b) = 0$ 이다.

$$P(-b) = (-b)^4 + (-b)^3 + 2(-b) - 4 = b^4 - b^3 - 2b - 4 = 0 \quad \text{이다.}$$

조립제법을 이용하거나 인수분해하면 $(b + 1)(b - 2)(b^2 + 2) = 0$ 이므로, 정수 b 의 값은 -1 또는 2 이다.

$$Q(-b) = (-b)^4 + (-b)^3 + a(-b)^2 + b(-b) + 1 = b^4 - b^3 + ab^2 - b^2 + 1 = 0 \quad \text{이다.}$$

(i) $b = -1$ 일 때, $1 - (-1) + a(-1)^2 - (-1)^2 + 1 = 1 + 1 + a - 1 + 1 = a + 2 = 0$ 이므로 $a = -2$ 이다.

(ii) $b = 2$ 일 때, $16 - 8 + a(4) - 4 + 1 = 4a + 5 = 0$ 이므로 $a = -\frac{5}{4}$ 이다. a 는 정수라는 조건에 맞지 않다.

따라서 $a = -2, b = -1$ 이므로 $ab = 2$ 이다.

$$P(x) - Q(x) = -ax^2 + (2 - b)x - 5 = 2x^2 + (2 - (-1))x - 5 = 2x^2 + 3x - 5 \quad \text{이다.}$$

따라서 다항식 $P(x) - Q(x)$ 를 $x - ab$, 즉 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의해 $2(2^2) + 3(2) - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$ 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 직선과 x 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 세우고, 주어진 조건을 만족하는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원 C 의 중심을 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 하자. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있으므로 $b = a + 1$ 이다. 원 C 가 x 축에 접하고 중심의 y 좌표가 양수이므로, 반지름의 길이는 중심의 y 좌표와 같다. 즉, $r = b = a + 1$ 이고 $a + 1 > 0$ 이므로 $a > -1$ 이다.

원 C 가 직선 $4x - 3y = 0$ 에 접하므로, 원의 중심 (a, b) 에서 이 직선까지의 거리는 반지름의 길이 r 과 같다. 점과 직선 사이의 거리 공식에 의해 $r = \frac{|4a - 3b|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4a - 3b|}{5}$ 이다. 이 식에 $b = a + 1$ 과 $r = a + 1$ 을 대입하면 $a + 1 = \frac{|4a - 3(a + 1)|}{5} = \frac{|a - 3|}{5}$ 이다.

따라서 $5(a + 1) = |a - 3|$ 이다. $a > -1$ 이므로 $5(a + 1) = -(a - 3)$ 에서 $6a = -2$ 이므로

$$a = -\frac{1}{3}$$

이고, 이 값은 $a > -1$ 과 $a < 3$ 을 모두 만족시킨다. $a \geq 3$ 인 경우 $5(a+1) = a-3$ 에서 $4a = -8$ 이므로 $a = -2$ 인데, 이는 $a \geq 3$ 에 모순이다. 그러므로 $a = -\frac{1}{3}$ 이고, 원 C 의 반지름의 길이는 $r = a + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 좌표평면 위에서 직선의 수직 조건을 이용하여 도형의 특정 길이를 구하고, 이를 활용하여 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 B를 원점, 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 설정하면 각 점의 좌표는 $A(0, 8)$, $B(0, 0)$, $D(3, 8)$ 이다. 선분 BC의 길이를 c 라 하면 $C(c, 0)$ 이다. 선분 CD의 중점 M의 좌표는 $M(\frac{c+3}{2}, \frac{0+8}{2}) = (\frac{c+3}{2}, 4)$ 이다.

두 직선 AM과 BD가 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1 이다. 직선 BD의 기울기는 $\frac{8-0}{3-0} = \frac{8}{3}$ 이고, 직선 AM의 기울기는

$\frac{4-8}{\frac{c+3}{2}-0} = \frac{-4}{\frac{c+3}{2}} = -\frac{8}{c+3}$ 이다. 수직 조건에 의해 $(-\frac{8}{c+3}) \times \frac{8}{3} = -1$ 이므로 $\frac{64}{3(c+3)} = 1$ 이다. 이 식을 풀면 $64 = 3c + 9$, $3c = 55$ 이므로 $c = \frac{55}{3}$ 이다.

점 M의 x좌표는 $\frac{\frac{55}{3}+3}{2} = \frac{61}{6} = \frac{32}{3}$ 이다. 삼각형 ABM의 밑변을 선분 AB로 하면 밑변의 길이는 8 이고, 높이는 점 M의 x좌표인 $\frac{32}{3}$ 이다. 따라서 삼각형 ABM의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times \frac{32}{3} = \frac{128}{3}$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 계수가 미지수인 삼차방정식을 인수분해하고, 근의 대소 관계에 따른 경우를 나누어 등차수열 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

주어진 삼차방정식 $P(x) = x^3 - 5x^2 + (k+4)x - k = 0$ 에서 $P(1) = 1 - 5 + k + 4 - k = 0$ 이므로 $x = 1$ 은 하나의 근이다. 조립제법을 이용하면 $(x-1)(x^2 - 4x + k) = 0$ 으로 인수분해된다. 따라서 세 실근은 1 과 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$ 의 두 근이다. $x^2 - 4x + k = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 $D/4 = (-2)^2 - k > 0$ 에서 $k < 4$ 이다. 또한 $x = 1$ 이 중근이 아니어야 하므로 $1 - 4 + k \neq 0$ 에서 $k \neq 3$ 이다. $x^2 - 4x + k = 0$ 의 두 근은 $2 \pm \sqrt{4-k}$ 이다. 세 실근은 $1, 2 - \sqrt{4-k}, 2 + \sqrt{4-k}$ 이다.

근의 대소 관계에 따라 경우를 나눈다. 1 과 $2 - \sqrt{4-k}$ 의 대소를 비교하면, $1 < 2 - \sqrt{4-k}$ 는 $k > 3$ 을 의미하고, $1 > 2 - \sqrt{4-k}$ 는 $k < 3$ 을 의미한다.

(i) $3 < k < 4$ 일 때: 세 근의 대소 관계는 $\alpha = 1, \beta = 2 - \sqrt{4-k}, \gamma = 2 + \sqrt{4-k}$ 이다. 세 근이 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의해 $2\beta = \alpha + \gamma$ 이다. $2(2 - \sqrt{4-k}) = 1 + (2 + \sqrt{4-k})$ 에서 $4 - 2\sqrt{4-k} = 3 + \sqrt{4-k}$, $1 = 3\sqrt{4-k}$ 이므로 $1 = 9(4-k)$ 이다. 따라서

$k = 4 - \frac{1}{9} = \frac{35}{9}$ 이고, 이는 $3 < k < 4$ 조건을 만족시킨다.

(ii) $k < 3$ 일 때: 세 근의 대소 관계는 $\alpha = 2 - \sqrt{4-k}, \beta = 1, \gamma = 2 + \sqrt{4-k}$ 이다. $2\beta = \alpha + \gamma$ 에서 $2(1) = (2 - \sqrt{4-k}) + (2 + \sqrt{4-k})$ 이므로 $2 = 4$ 가 되어 모순이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $k = \frac{35}{9}$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 이차함수의 차와 합으로 정의된 함수의 성질을 이용하여 주어진 조건에 맞는 함수값을 구하는 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수를 각각 a , $-a$ ($a \neq 0$)라 하자. $h(x) = f(x) - g(x)$ 의 최고차항의 계수는 $2a$ 이고, $y = h(x)$ 의 그래프의 꼭짓점이 $(1, 8)$ 이므로 $h(x) = 2a(x-1)^2 + 8$ 이다. 두 점 A, B의 x 좌표는 방정식 $h(x) = 0$ 의 두 실근이다.

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점 A, B는 직선 $y = -2x + k$ 위에 있으므로, 교점의 x 좌표를 α, β 라 하면 $f(\alpha) = g(\alpha) = -2\alpha + k$, $f(\beta) = g(\beta) = -2\beta + k$ 이다.

$s(x) = f(x) + g(x)$ 라 하면, $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 이차항의 계수가 서로 부호만 반대이므로 $s(x)$ 는 일차 이하의 함수이다.

$s(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) = 2(-2\alpha + k) = -4\alpha + 2k$ 이고, $s(\beta) = f(\beta) + g(\beta) = -4\beta + 2k$ 이다. $s(x)$ 는 두 점 $(\alpha, -4\alpha + 2k)$, $(\beta, -4\beta + 2k)$ 를 지나므로 $s(x) = -4x + 2k$ 이다.

주어진 조건에서 직선 $y = -2x + k$ 의 y 절편 k 가 $f(1) + g(1)$ 의 값과 같으므로 $k = s(1)$ 이다. $s(1) = -4(1) + 2k = -4 + 2k$ 이므로, $k = -4 + 2k$ 에서 $k = 4$ 를 얻는다. 따라서 $s(x) = f(x) + g(x) = -4x + 8$ 이다.

따라서 구하는 값은 $f(3) + g(3) = s(3) = -4(3) + 8 = -4$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 선분의 내분점과 세 점을 지나는 원의 방정식을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별하는 문제입니다.

[풀이]

$k = \frac{m}{m+n}$ 이라 하면, 세 점 P, Q, R의 좌표는 다음과 같습니다.

$$P\left(\frac{6m}{m+n}, 0\right) = (6k, 0)$$

$$Q\left(6, \frac{6m}{m+n}\right) = (6, 6k)$$

$$R\left(\frac{6n}{m+n}, 6\right) = (6(1-k), 6)$$

정사각형 OABC의 중심인 점 (3, 3) 에서 세 점 P, Q, R까지의 거리의 제곱을 각각 구하면 다음과 같습니다.

$$d(P, (3, 3))^2 = (6k-3)^2 + (0-3)^2 = (6k-3)^2 + 9$$

$$d(Q, (3, 3))^2 = (6-3)^2 + (6k-3)^2 = 9 + (6k-3)^2$$

$$d(R, (3, 3))^2 = (6(1-k)-3)^2 + (6-3)^2 = (-6k+3)^2 + 9 = (6k-3)^2 + 9$$

세 거리가 모두 같으므로 원 C 의 중심은 (3, 3) 이고, 반지름의 제곱 r^2 은 $r^2 = (6k-3)^2 + 9$ 입니다.

ㄱ. $m = 2n$ 이면 $k = \frac{2n}{2n+n} = \frac{2}{3}$ 입니다. 점 Q의 좌표는 $(6, 6 \cdot \frac{2}{3}) = (6, 4)$ 입니다. 따라서 선분 OQ의 길이는 $\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ 입니다. (참)

ㄴ. 선분 CO를 $m:n$ 으로 내분하는 점 S의 좌표는 $(0, \frac{6n}{m+n}) = (0, 6(1-k))$ 입니다. 이 점과 원의 중심 (3, 3) 사이의 거리의 제곱은 $(0-3)^2 + (6(1-k)-3)^2 = 9 + (-6k+3)^2 = 9 + (6k-3)^2 = r^2$ 이므로 점 S는 원 C 위에 있습니다. (참)

ㄷ. 원 C 의 넓이는 $\pi r^2 = \pi\{(6k-3)^2 + 9\}$ 입니다. 넓이가 13π 이므로 $(6k-3)^2 + 9 = 13$, 즉 $(6k-3)^2 = 4$ 입니다.

$6k-3=2$ 또는 $6k-3=-2$ 에서 $6k=5$ 또는 $6k=1$ 이므로 $k=\frac{5}{6}$ 또는 $k=\frac{1}{6}$ 입니다.

$k=\frac{5}{6}$ 일 때 $(m)/(m+n)=(5)/(6) \Rightarrow 6m=5m+5n \Rightarrow m=5n$ 입니다.

$k=\frac{1}{6}$ 일 때 $(m)/(m+n)=(1)/(6) \Rightarrow 6m=m+n \Rightarrow 5m=n$ 입니다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳습니다.

21. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 두 이차함수의 그래프를 이용하여 정의된 새로운 함수의 조건을 해석하고, 이를 통해 미정계수를 결정하여 함숫값을 구한다.

[풀이] (가) 조건에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 11 이다. 함수 $g(x) = 2(x-4)^2 + 2$ 는 아래로 볼록하여 최솟값만 가지므로, $h(x)$ 의 최댓값은 함수 $f(x) = -(x-a)^2 + c$ 의 최댓값에서 결정된다. 따라서 $f(x)$ 의 꼭짓점 (a, c) 가 $h(x)$ 의 그래프에 포함되어야 하므로 $a < \alpha$ 또는 $a > \beta$ 이고, 최댓값은 $c = 11$ 이다.

(나) 조건에서 방정식 $h(x) = 10$ 의 모든 실근의 합은 2 이다. $h(x) = 10$ 의 근은 $f(x) = 10$ 또는 $g(x) = 10$ 의 근 중에서 해당 정의 구간에 속하는 값이다.

$f(x) = 10$ 에서 $-(x-a)^2 + 11 = 10$, 즉 $(x-a)^2 = 1$ 이므로 두 근은 $x = a-1, x = a+1$ 이고 합은 $2a$ 이다.

$g(x) = 10$ 에서 $2(x-4)^2 + 2 = 10$, 즉 $(x-4)^2 = 4$ 이므로 두 근은 $x = 2, x = 6$ 이고 합은 8 이다.

$h(x) = 10$ 의 모든 실근의 합이 2 가 되어야 하므로, $f(x) = 10$ 의 두 근의 합이 2 가 되는 경우, 즉 $2a = 2$ 에서 $a = 1$ 일 가능성이 높다.

$a = 1, c = 11$ 일 때, $f(x) = -(x-1)^2 + 11$ 이다. 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 풀면,

$$-(x-1)^2 + 11 = 2(x-4)^2 + 2$$

$$-x^2 + 2x + 10 = 2x^2 - 16x + 34$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

따라서 $\alpha = 2, \beta = 4$ 이다. 이때 $a = 1 < \alpha = 2$ 이므로 최댓값 조건도 만족한다.

이제 $h(x) = 10$ 의 근을 확인하면,

$f(x) = 10$ 의 근 $0, 2$ 중에서 $x < 2$ 또는 $x > 4$ 를 만족하는 근은 $x = 0$ 이다.

$g(x) = 10$ 의 근 $2, 6$ 중에서 $2 \leq x \leq 4$ 를 만족하는 근은 $x = 2$ 이다.

따라서 $h(x) = 10$ 의 모든 실근은 0 과 2 이고, 이들의 합은 2 이므로 (나) 조건을 만족한다.

따라서 $a = 1, c = 11$ 이다.

구하는 값은 $h(1)$ 이다. $x = 1$ 은 $1 < \alpha = 2$ 이므로 $h(1) = f(1)$ 이다.

$$h(1) = f(1) = -(1-1)^2 + 11 = 11 \quad .$$

따라서 $h(1)$ 의 값은 11 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 8

[출제의도] 인수정리와 나머지정리를 이용하여 다항식의 미정계수를 결정하고 다항식의 값의 절댓값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

[풀이] 문제의 조건에 따라 인수정리와 나머지정리를 적용하면 $P(2) = 0$, $P(-1) = 6$ 이다.

$$P(2) = 8 + 4a + 2b - 4 = 0 \quad \text{에서 } 2a + b = -2 \quad \text{이다.}$$

$$P(-1) = -1 + a - b - 4 = 6 \quad \text{에서 } a - b = 11 \quad \text{이다.}$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3, b = -8$ 이므로 $P(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 4$ 이다.

$$P(1) = 1 + 3 - 8 - 4 = -8 \quad \text{이므로, 구하는 값은 } |P(1)| = |-8| = 8 \quad \text{이다.}$$

23. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식과 절댓값 기호를 포함한 부등식을 풀어 공통 해의 범위에 속하는 정수의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ 을 풀면, $(x-1)(x-6) \leq 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 6$ 이다.

두 번째 부등식 $|x-4| \geq 2$ 를 풀면, $x-4 \leq -2$ 또는 $x-4 \geq 2$ 이므로 $x \leq 2$ 또는 $x \geq 6$ 이다.

두 부등식의 해의 공통 범위를 구하면 $1 \leq x \leq 2$ 또는 $x = 6$ 이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 x 는 $1, 2, 6$ 으로 총 3개이다.

24. 정답 및 풀이

정답: 32

[출제의도] 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈 연산을 복합적으로 활용하여 특정 행렬의 모든 성분의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 두 식을 연립하여 행렬 A, B 를 구한다.

$$(A+B) - (A-2B) = 3B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{이므로 } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{이다.}$$

$$A = (A+B) - B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{이다.}$$

문제의 조건에 따라 $X = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ 이다.

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -20 & 46 \end{pmatrix} \quad \text{이다.}$$

따라서 행렬 X^2 의 모든 성분의 합은 $14 - 8 - 20 + 46 = 32$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: 20

[출제의도] 인수분해를 통해 얻은 관계식을 이차식에 대입하여 연립방정식을 풀고, 근과 계수의 관계를 이용하여 두 해를 좌표로 하는 점 사이의 거리를 계산할 수 있는지 평가한다.

[풀이] $x^2 - y^2 = 0$ 을 인수분해하면 $(x - y)(x + y) = 0$ 이므로 $x = y$ 또는 $x = -y$ 이다.

(i) $x = y$ 를 $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 3 = 0$ 에 대입하면,

$y^2 + y^2 + 3y + 5y + 3 = 0$, $2y^2 + 8y + 3 = 0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식 $D/4 = 4^2 - 2 \cdot 3 = 10 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근 β_1, β_2 를 갖는다. 두 해는 $(\beta_1, \beta_1), (\beta_2, \beta_2)$ 이다.

(ii) $x = -y$ 를 $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 3 = 0$ 에 대입하면,

$(-y)^2 + y^2 + 3(-y) + 5y + 3 = 0$, $2y^2 + 2y + 3 = 0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식 $D/4 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5 < 0$ 이므로 실근을 갖지 않는다.

따라서 주어진 연립방정식의 서로 다른 두 해는 (i)의 경우에서만 나온다.

두 점 $P(\beta_1, \beta_1)$, $Q(\beta_2, \beta_2)$ 에 대하여 선분 PQ 의 길이의 제곱은

$\overline{PQ}^2 = (\beta_2 - \beta_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 = 2(\beta_2 - \beta_1)^2$ 이다.

이차방정식 $2y^2 + 8y + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해 $\beta_1 + \beta_2 = -4$, $\beta_1\beta_2 = \frac{3}{2}$ 이다.

$(\beta_2 - \beta_1)^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = (-4)^2 - 4(\frac{3}{2}) = 16 - 6 = 10$ 이다.

따라서 $\overline{PQ}^2 = 2 \times 10 = 20$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: 103

[출제의도] 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 원 위의 점에서 직선까지의 거리의 최댓값을 구하고, 이를 만족하는 미지수의 값을 찾을 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 원 $C: (x - k)^2 + y^2 = 4$ 의 중심은 $(k, 0)$ 이고 반지름의 길이 r 는 2 이다. 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 원의 중심과 직선 사이의 거리 d 에 반지름의 길이 r 를 더한 값이므로, $d + r = 10$ 에서 $d = 8$ 이다.

원의 중심 $(k, 0)$ 과 직선 $l: 3x - 4y - 50 = 0$ 사이의 거리는 $d = \frac{|3k - 4(0) - 50|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3k - 50|}{5}$ 이다.

$\frac{|3k - 50|}{5} = 8$ 에서 $|3k - 50| = 40$ 이므로, $3k - 50 = 40$ 또는 $3k - 50 = -40$ 이다.

이를 풀면 $k = 30$ 또는 $k = \frac{10}{3}$ 이고, 두 값 모두 양수이다.

따라서 모든 양수 k 의 값의 합은 $30 + \frac{10}{3} = \frac{100}{3}$ 이다.

문제의 조건에서 이 값이 $\frac{q}{p}$ 이므로 $p = 3, q = 100$ 이다.

따라서 구하는 값은 $p + q = 3 + 100 = 103$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 4

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지정리를 활용하여, 주어진 조건을 만족시키는 다항식을 결정하고 함숫값을 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

다항식 $f(x)$ 를 2차식 $(x - a)^2$ 으로 나눈 나머지는 1차 이하이므로, $2f(x) + 6x^2 - 4$ 는 1차 이하 다항식이다. 이는 $f(x)$ 가 $-3x^2$ 을 최고차항으로 갖는 이차식임을 의미한다. $f(x) = -3x^2 + bx + c$ 라 하면, 나머지는 $2bx + 2c - 4$ 이다. $f(x) = -3(x - a)^2 + (2bx + 2c - 4)$ 에서 계수를 비교하면 $b = -6a, c = 3a^2 + 4$ 이므로 $f(x) = -3x^2 - 6ax + 3a^2 + 4$ 이다.

$\{f(x)\}^2 - 4f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나눈 나머지가 -3 이므로, 나머지정리에 의해 $\{f(1)\}^2 - 4f(1) + 3 = 0$ 이고 $\{f(-1)\}^2 - 4f(-1) + 3 = 0$ 이다. 따라서 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 의 값은 각각 1 또는 3 이다. $f(1) = 3a^2 - 6a + 1$ 이고 $f(-1) = 3a^2 + 6a + 1$ 이므로, 각 경우를 연립하여 풀면 $f(1) = 1$ 과 $f(-1) = 1$ 을 동시에 만족하는 유일한 상수 a 는 0 이다.

$a = 0$

이므로 $f(x) = -3x^2 + 4$ 이다. 따라서 구하는 값은 $f(a^2) = f(0^2) = f(0) = 4$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이차함수의 그래프와 꼭짓점, 정사각형 조건, 접선의 기울기를 이용하여 함수를 결정한다.

[풀이]

최고차항의 계수를 k 라 하면

$f(x) = k(x+1)(x-b)$ ($k > 0, b > 1$) 로 놓을 수 있다.

두 근이 $-1, b$ 이므로 꼭짓점 P 의 좌표는

$((b-1)/2, -k(b+1)^2/4)$ 이다.

사각형 OP_yPP_x 가 정사각형이므로 꼭짓점의 x 좌표와 y 좌표의 절댓값이 같다. 따라서

$(b-1)/2 = k(b+1)^2/4$,

$2(b-1) = k(b+1)^2$ 이다. ㉠

직선 AP 의 기울기는

$[-k(b+1)^2/4]/[(b-1)/2+1] = -k(b+1)/2$ 이다.

한편

$f(x) = k[x^2 - (b-1)x - b]$ 이므로

$f'(x) = k[2x - (b-1)]$ 이다.

점 C 의 x 좌표는 0 이므로 점 C 에서의 접선의 기울기는

$f'(0) = -k(b-1)$ 이다.

두 직선이 평행하므로

$-k(b+1)/2 = -k(b-1)$ 이다.

$k > 0$ 이므로

$(b+1)/2 = b-1$,

$b+1 = 2b-2$ 에서 $b=3$ 이다.

$b=3$ 을 ㉠에 대입하면

$2(3-1) = k(3+1)^2$,

$4 = 16k$ 이므로 $k = 1/4$ 이다.

따라서

$f(x) = (1/4)(x+1)(x-3)$ 이고,

$f(9) = (1/4)(9+1)(9-3) = 15$ 이다.

[정답] ④

29. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각형의 수심, 외심, 무게중심의 관계(오일러 직선)와 점과 직선 사이의 거리, 원의 방정식을 이용하여 삼각형의 기하학적 양을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이] 삼각형의 외심 O , 무게중심 G , 수심 H 는 한 직선(오일러 직선) 위에 있으며, $3\vec{OG} = \vec{OH}$ 가 성립하므로 $OG^2 = \frac{1}{9}OH^2$ 이다. 또한 외접원의 반지름을 R 이라 하면 외심 O 에서 각 꼭짓점까지의 거리는 같으므로 $OA^2 = R^2$ 이다.

조건 (나)에 따라 외심 O 의 좌표를 $(a, -a)$ 로 놓을 수 있다. 점 $A(4, -2)$, $H(2, -4)$ 이므로 다음이 성립한다.

$OH^2 = (a-2)^2 + (-a+4)^2 = 2a^2 - 12a + 20$

$OA^2 = (a-4)^2 + (-a+2)^2 = 2a^2 - 12a + 20$

즉, $OH^2 = OA^2 = R^2$ 이다.

외심 O를 원점으로 평행이동한 좌표계에서 점 A, H는 각각 $A'(4-a, a-2)$, $H'(2-a, a-4)$ 으로 이동한다. 외심이 원점일 때 $O\vec{A}' + O\vec{B}' + O\vec{C}' = O\vec{H}'$ 가 성립하므로, $\vec{B}' + \vec{C}' = \vec{H}' - \vec{A}' = (-2, -2)$ 이다. 따라서 선분 B'C'의 중점 M'의 좌표는 $(-1, -1)$ 이다.

직선 B'C'는 선분 OM'에 수직이므로 그 방정식은 $x + y + 2 = 0$ 이다. 점 A'에서 직선 B'C'까지의 거리인 높이 h 는 다음과 같다.

$$h = \frac{|(4-a) + (a-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 ABC의 넓이가 12이므로, 밑변의 길이는 $BC = B'C' = \frac{2 \times 12}{2\sqrt{2}} = \frac{24}{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ 이다.

외접원의 중심 O'에서 현 B'C'까지의 거리는 $|OM'| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 이다. 피타고라스 정리에 의해 외접원의 반지름의 제곱 R^2 은 다음과 같다.

$$R^2 = |OM'|^2 + \left(\frac{B'C'}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 2 + 18 = 20$$

따라서 구하는 값은 $OG^2 = \frac{1}{9}OH^2 = \frac{1}{9}R^2 = \frac{20}{9}$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 이차함수의 공통접선이 유일할 조건과 이차함수의 최대·최소 개념을 이용하여 미지수를 구하고, 접선의 방정식을 구하는 문제를 해결한다.

[풀이]

두 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -x^2 + ax + b$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선을 $y = mx + n$ 이라 하자.

이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = mx + n$, 즉 $x^2 + (2-m)x + (3-n) = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면, $D_1 = (2-m)^2 - 4(3-n) = 0$ 이다.

또한 이차방정식 $-x^2 + ax + b = mx + n$, 즉 $x^2 + (m-a)x + (n-b) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면, $D_2 = (m-a)^2 - 4(n-b) = 0$ 이다.

$D_1 = 0$ 에서 $4(3-n) = (2-m)^2$ 이고, $D_2 = 0$ 에서 $4(n-b) = (m-a)^2$ 이다.

두 식을 더하면 $4(3-b) = (2-m)^2 + (m-a)^2$ 이다. 이 식을 m 에 대해 정리하면,

$$12 - 4b = 4 - 4m + m^2 + m^2 - 2am + a^2$$

$$2m^2 - (4+2a)m + (a^2 + 4b - 8) = 0$$

조건 (나)에서 공통접선이 오직 하나 존재하므로, 위 m 에 대한 이차방정식은 중근을 가져야 한다. 따라서 판별식이 0이어야 한다.

$$D_m = (4+2a)^2 - 4(2)(a^2 + 4b - 8) = 0$$

$$4(a+2)^2 - 8(a^2 + 4b - 8) = 0$$

$$(a^2 + 4a + 4) - 2(a^2 + 4b - 8) = 0, -a^2 + 4a - 8b + 20 = 0, \text{ 즉 } a^2 - 4a + 8b - 20 = 0 \text{ 이다.}$$

한편, $g(x) = -(x^2 - ax) + b = -(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} + b$ 이므로, 조건 (다)에 의해 최댓값은 $\frac{a^2}{4} + b = 10$ 이다. 즉 $a^2 + 4b = 40$, $8b = 80 - 2a^2$ 이다.

이것을 $a^2 - 4a + 8b - 20 = 0$ 에 대입하면 $a^2 - 4a + (80 - 2a^2) - 20 = 0$, $-a^2 - 4a + 60 = 0$, $a^2 + 4a - 60 = 0$ 이다.

$(a+10)(a-6) = 0$ 이고, 조건 (가)에서 $a > 0$ 이므로 $a = 6$ 이다.

$a = 6$ 을 $a^2 + 4b = 40$ 에 대입하면 $36 + 4b = 40$, $4b = 4$, $b = 1$ 이다.

$a = 6, b = 1$ 을 m 에 대한 이차방정식에 대입하면,

$$2m^2 - (4+12)m + (36+4-8) = 0, 2m^2 - 16m + 32 = 0, m^2 - 8m + 16 = 0, (m-4)^2 = 0 \text{ 이므로 } m = 4 \text{ 이다.}$$

$m = 4$ 를 $D_1 = 0$ 식에 대입하면 $(2-4)^2 - 4(3-n) = 0$, $4 - 12 + 4n = 0$, $4n = 8$ 이므로 $n = 2$ 이다.

따라서 $a = 6, b = 1, m = 4, n = 2$ 이고, 구하는 값은 $a + b + m + n = 6 + 1 + 4 + 2 = 13$ 이다.