

MathGenix 2026년 고1 9월 모의고사 대비 시험 03 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2609-03-SOL

출제 : MathGenix

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	③	②	④	③	③	③	②	②
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	④	②	③	③	④	③	③	②	③
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	18	①	11	4	9	13	90	72	③

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제 의도] 다항식의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 이용하여 연립방정식으로 주어진 다항식을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 주어진 두 식 $2A + B = 3x^2 + 3x - 4$ 와 $A - 2B = -x^2 + 4x + 3$ 을 연립하여 $A + B$ 를 구한다. A 와 B 를 하나의 문자로 보고 연립방정식을 풀 수 있다. 구하고자 하는 $A + B$ 를 주어진 두 식의 합과 차로 표현해본다. $A + B = p(2A + B) + q(A - 2B)$ 라 하면, A 의 계수는 $2p + q = 1$ 이고 B 의 계수는 $p - 2q = 1$ 이다. 두 식을 연립하여 풀면 $p = \frac{3}{5}, q = -\frac{1}{5}$ 를 얻는다. 따라서

$A + B = \frac{3}{5}(2A + B) - \frac{1}{5}(A - 2B)$ 이다. 주어진 다항식을 대입하여 정리하면

$A + B = \frac{3}{5}(3x^2 + 3x - 4) - \frac{1}{5}(-x^2 + 4x + 3) = \frac{1}{5}(9x^2 + 9x - 12 + x^2 - 4x - 3) = \frac{1}{5}(10x^2 + 5x - 15)$ 이다. 그러므로 구하는 다항식은 $A + B = 2x^2 + x - 3$ 이다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제 의도] 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 연립방정식을 세우고, 이를 풀어 식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 두 행렬 A 와 B 가 서로 같으므로 ($A = B$), 대응하는 성분이 모두 같아야 합니다.

행렬 $A = \begin{pmatrix} a+b & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 와 $B = \begin{pmatrix} 6 & 2a \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 에서 각 성분을 비교하면 다음과 같은 등식을 얻을 수 있습니다.

(1, 1) 성분: $a + b = 6$

(1, 2) 성분: $8 = 2a$

(2, 1) 성분: $3 = 3$

(2, 2) 성분: $2 = 2$

먼저 (1, 2) 성분의 등식 $8 = 2a$ 에서 $a = 4$ 임을 알 수 있습니다.

이 값을 (1, 1) 성분의 등식 $a + b = 6$ 에 대입하면,

$4 + b = 6$

따라서 $b = 2$ 입니다.

문제에서 요구하는 $a^2 + b^2$ 의 값은 다음과 같습니다.

$a^2 + b^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

따라서 정답은 ③입니다.

3. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제 의도] 다항식의 나눗셈과 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 주어진 다항식을 $P(x) = x^3 + ax^2 - 7x + b$ 라 하자. $P(x)$ 가 $x^2 - x - 2$ 로 나누어떨어지고 $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ 이므로, 나머지 정리에 의해 $P(2) = 0$ 이고 $P(-1) = 0$ 이다. 이 두 조건을 이용하여 a, b 에 대한 연립방정식을 세운다.

$$P(2) = 2^3 + a(2)^2 - 7(2) + b = 8 + 4a - 14 + b = 0 \quad \text{이므로 } 4a + b = 6 \quad \text{이다.}$$

$$P(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 - 7(-1) + b = -1 + a + 7 + b = 0 \quad \text{이므로 } a + b = -6 \quad \text{이다.}$$

문제에서 $a + b$ 의 값을 물었으므로, 두 번째 식에서 바로 답을 얻을 수 있다. 따라서 구하는 값은 -6 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제 의도] 절댓값을 포함한 부등식과 미지수를 포함한 연립부등식을 풀어 해의 조건을 만족시키는 미지수의 값의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

부등식 $|x - 2| < 4$ 에서 $-4 < x - 2 < 4$ 이므로, $-2 < x < 6$ 이다. 또한, 부등식 $3x + 2 > a$ 에서 $x > \frac{a-2}{3}$ 이다. 따라서 연립부등식의 해는 $\frac{a-2}{3} < x < 6$ 이다.

이 범위를 만족시키는 정수 x 의 개수가 5개여야 하므로, 해가 되는 정수 x 는 1, 2, 3, 4, 5 이다. 따라서 x 의 값의 범위는 1 과 같거나 큰 수부터 시작해야 한다. 즉, $\frac{a-2}{3}$ 는 1 보다 작고 0 보다 크거나 같아야 한다.

따라서 $0 \leq \frac{a-2}{3} < 1$ 이 성립해야 한다. 이 부등식의 각 변에 3을 곱하면 $0 \leq a - 2 < 3$ 이고, 각 변에 2를 더하면 $2 \leq a < 5$ 이다. 이를 만족시키는 정수 a 는 2, 3, 4 이므로, 모든 정수 a 의 값의 합은 $2 + 3 + 4 = 9$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제 의도] 이차방정식이 중근을 가질 조건(판별식)을 이용하여 미지수의 값을 구하고, 이를 다른 이차방정식에 적용하여 근과 계수의 관계를 활용해 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이] x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x + a - 5 = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

x 의 계수가 짝수이므로 판별식의 짝수 공식을 이용하면,

$$D/4 = 2^2 - 1 \cdot (a - 5) = 0$$

$$4 - (a - 5) = 0$$

$$4 - a + 5 = 0$$

$$9 - a = 0$$

따라서 $a = 9$ 이다.

$a = 9$ 를 원래 이차방정식에 대입하면 $x^2 + 4x + 4 = 0$ 이 된다.

$(x + 2)^2 = 0$ 이므로 이 방정식의 중근은 $x = -2$ 이다.

따라서 $k = -2$ 이다.

이제 $a = 9$ 와 $k = -2$ 를 두 번째 이차방정식 $x^2 - (a - k)x + ak = 0$ 에 대입하면,

$$x^2 - (9 - (-2))x + (9)(-2) = 0$$

$$x^2 - 11x - 18 = 0$$

이 이차방정식의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해,

$$\alpha + \beta = 11, \alpha\beta = -18 \quad \text{이다.}$$

구하고자 하는 값은 $\alpha^2 + \beta^2$ 이므로 곱셈 공식을 이용하면,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (11)^2 - 2(-18)$$

$$= 121 + 36$$

$$= 157$$

따라서 정답은 ④이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각형의 무게중심과 선분의 외분점 공식을 이용하여 관련 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(2, 2)$ 이므로, 무게중심 공식을 이용하면 꼭짓점 C의 좌표 (a, b) 는 다음과 같다.

$$\frac{-1+4+a}{3} = 2 \quad \text{에서 } 3+a=6 \quad \text{이므로 } a=3 \quad \text{이다.}$$

$$\frac{5+(-1)+b}{3} = 2 \quad \text{에서 } 4+b=6 \quad \text{이므로 } b=2 \quad \text{이다.}$$

따라서 선분 AB를 $a:b=3:2$ 로 외분하는 점 Q의 좌표 (p, q) 는 외분점 공식을 이용하여 구할 수 있다.

$$p = \frac{3(4)-2(-1)}{3-2} = 12+2=14$$

$$q = \frac{3(-1)-2(5)}{3-2} = -3-10=-13$$

그러므로 구하는 값은 $p+q=14+(-13)=1$ 이다.

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼각형의 무게중심 좌표를 구하고, 특정 조건을 만족하는 미지수의 값을 찾을 수 있는가를 묻는 문항이다.

[풀이]

세 점 $A(a, 5)$, $B(-1, -2)$, $C(4, a)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구한다. 무게중심 G가 x 축 위에 있으므로 G의 y 좌표는 0이다.

$$\text{무게중심 } G \text{의 } y \text{ 좌표는 } \frac{5+(-2)+a}{3} = \frac{a+3}{3} \quad \text{이다.}$$

$$\text{조건에 따라 } \frac{a+3}{3} = 0 \quad \text{이므로, } a+3=0 \quad \text{에서 } a=-3 \quad \text{이다.}$$

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 행렬의 거듭제곱을 포함한 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{에서 } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & -2a \\ -4 & 2a+9 \end{pmatrix} \quad \text{이다. } A^2 \text{의 } (1, 2) \text{ 성분이 } 4 \quad \text{이므로 } -2a=4 \quad \text{에서 } a=-2 \quad \text{이고, } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{이다.}$$

$$\text{케일리-해밀턴 정리에 의해 } A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)E = O \quad \text{이다. } \text{tr} A = 1 + (-3) = -2 \quad \text{이고 } \det A = (1)(-3) - (-2)(2) = 1 \quad \text{이므로}$$

$$A^2 + 2A + E = O, \quad \text{즉 } A^2 = -2A - E \quad \text{이다.}$$

$$A^2 = -2A - E \quad \text{를 이용하여 } A \text{의 거듭제곱을 차례로 간단히 하면 다음과 같다.}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(-2A - E) = -2A^2 - A = -2(-2A - E) - A = 3A + 2E$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = A(3A + 2E) = 3A^2 + 2A = 3(-2A - E) + 2A = -4A - 3E$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A(-4A - 3E) = -4A^2 - 3A = -4(-2A - E) - 3A = 5A + 4E$$

$$\text{따라서 } A^4 + A^5 = (-4A - 3E) + (5A + 4E) = A + E \quad \text{이다.}$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{이므로, 모든 성분의 합은 } 2 + (-2) + 2 + (-2) = 0 \quad \text{이다.}$$

9. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 한 점과 원 위의 점의 중점이 그리는 자취의 방정식을 구하고, 이 자취와 다른 한 점 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

원 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 의 중심을 C 라 하면 $C(2, 0)$ 이고 반지름의 길이는 2 이다. 점 P 의 좌표를 (x, y) , 선분 AP 의 중점 M 의 좌표를 (X, Y) 라 하자.

점 M 은 선분 AP 의 중점이므로 $X = \frac{x+4}{2}$, $Y = \frac{y+2}{2}$ 에서 $x = 2X - 4$, $y = 2Y - 2$ 이다. 점 $P(x, y)$ 는 원 위의 점이므로 이 식을 원의 방정식에 대입하면 $(2X - 4 - 2)^2 + (2Y - 2)^2 = 4$ 이고, $4(X - 3)^2 + 4(Y - 1)^2 = 4$ 이므로 점 M 이 그리는 도형의 방정식은 $(X - 3)^2 + (Y - 1)^2 = 1$ 이다.

점 M 이 그리는 도형은 중심이 $C'(3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원이다. 점 $B(-1, -2)$ 와 중심 $C'(3, 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(3 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ 이다. 따라서 점 B 와 점 M 사이의 거리의 최솟값은 중심 C' 까지의 거리에서 반지름의 길이를 뺀 값이므로 $5 - 1 = 4$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선의 방정식을 구하고 미정계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 선분 AB 의 중점의 좌표는 $((-1+3)/(2), (5-3)/(2))$, 즉 $(1, 1)$ 이다.

직선 AB 의 기울기는 $(-3-5)/(3-(-1)) = (-8)/(4) = -2$ 이다.

선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 $-(1)/(-2) = (1)/(2)$ 이고 점 $(1, 1)$ 을 지나므로, 그 방정식은 $y - 1 = (1)/(2)(x - 1)$ 이다.

이 식을 정리하면 $2y - 2 = x - 1$, 즉 $x - 2y + 1 = 0$ 이다.

주어진 방정식 $ax + 2y + b = 0$ 과 계수를 비교하기 위해 $x - 2y + 1 = 0$ 의 양변에 -1 을 곱하면 $-x + 2y - 1 = 0$ 이다.

따라서 $a = -1$, $b = -1$ 이므로 $a + b = -2$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 정수의 개수를 구한다.

[풀이]

(가)의 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면, $D_1 = k^2 - 4(1)(3k) = k^2 - 12k < 0$ 이어야 한다. 따라서 $k(k - 12) < 0$ 이므로 $0 < k < 12$ 이다.

(나)의 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 판별식, 두 근의 합, 두 근의 곱이 모두 양수여야 한다. 판별식을 D_2 라 하면,

1) $D_2/4 = (k-3)^2 - (4k-7) = k^2 - 10k + 16 = (k-2)(k-8) > 0$. 따라서 $k < 2$ 또는 $k > 8$ 이다.

2) (두 근의 합) $= 2(k-3) > 0$ 이므로 $k > 3$ 이다.

3) (두 근의 곱) $= 4k - 7 > 0$ 이므로 $k > \frac{7}{4}$ 이다.

위 세 가지 조건을 모두 만족하는 k 의 범위는 $k > 8$ 이다.

두 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 k 의 범위는 $8 < k < 12$ 이다. 이 범위의 정수 k 는 9, 10, 11 로 총 3개이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 공통부분이 생기도록 식을 묶어 치환을 통해 다항식을 인수분해하고, 완전제곱식의 조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문항을 출제한다.

[풀이]

주어진 다항식 $P(x)$ 의 항을 적절히 묶어 공통부분을 찾습니다.

$$P(x) = \{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\} + k = (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) + k$$

$x^2 + 3x = t$ 로 치환하여 $P(x)$ 를 t 에 대한 식으로 나타냅니다.

$$P(x) = (t-4)(t+2) + k = t^2 - 2t - 8 + k$$

$$P(x)$$

가 완전제곱식이 되려면 t 에 대한 이차식 $t^2 - 2t - 8 + k$ 가 완전제곱식이어야 합니다. 상수항이 $(\frac{-2}{2})^2$ 이 되어야 하므로,
 $-8 + k = (\frac{-2}{2})^2 = 1$ 에서 $k = 9$ 입니다.
 이때 $P(x) = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$ 이고, 다시 $t = x^2 + 3x$ 를 대입하면 $P(x) = (x^2 + 3x - 1)^2$ 입니다.
 $Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $Q(x) = x^2 + 3x - 1$ 입니다. 따라서 $Q(1) = 1^2 + 3(1) - 1 = 3$ 입니다.
 구하는 값은 $k + Q(1) = 9 + 3 = 12$ 입니다.

13. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 제한된 범위에서 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이차함수의 그래프와 꼭짓점의 위치 관계를 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f(x) = x^2 - 2(k-1)x + 4k - 7$ 이라 하자. $y = f(x)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이고, 대칭축의 방정식은 $x = k - 1$ 이다.

주어진 부등식이 $x \geq 1$ 에서 항상 성립하려면, 이 범위에서 $f(x)$ 의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

1. 대칭축이 $x = 1$ 보다 왼쪽에 있을 경우, 즉 $k - 1 < 1$ ($k < 2$)일 때:

$x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 는 증가하므로 최솟값은 $f(1)$ 이다. $f(1) = 1 - 2(k-1) + 4k - 7 = 2k - 4 \geq 0$ 이므로 $k \geq 2$ 이다. $k < 2$ 와 $k \geq 2$ 를 동시에 만족하는 k 는 존재하지 않는다.

2. 대칭축이 $x = 1$ 이거나 $x = 1$ 보다 오른쪽에 있을 경우, 즉 $k - 1 \geq 1$ ($k \geq 2$)일 때:

최솟값은 꼭짓점의 y 좌표인 $f(k-1)$ 이다. $f(k-1) = (k-1)^2 - 2(k-1)^2 + 4k - 7 = -(k-1)^2 + 4k - 7 = -k^2 + 6k - 8 \geq 0$ 이다. 즉, $k^2 - 6k + 8 \leq 0$ 이고, $(k-2)(k-4) \leq 0$ 이므로 $2 \leq k \leq 4$ 이다. 이 범위는 $k \geq 2$ 조건을 만족한다.

두 경우를 종합하면 k 의 값의 범위는 $2 \leq k \leq 4$ 이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 정수 k 의 최솟값은 2 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 절댓값 부등식과 미지수를 포함한 이차부등식의 관계를 추론하여 조건을 만족하는 미지수의 값을 구한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $|x - k| \leq 3$ 의 해는 $k - 3 \leq x \leq k + 3$ 이다.

두 번째 부등식 $x^2 - (a+4)x + 4a < 0$ 은 $(x-a)(x-4) < 0$ 으로 인수분해된다. 자연수 a 에 대한 정수 해의 집합을 S_a 라 하자.

연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 2개인 경우는 구간 $[k-3, k+3]$ 이 S_a 의 양쪽 끝에 있는 정수 2개씩만을 포함하는 두 가지 경우이다.

S_a 의 원소 개수를 m , 가장 작은 두 정수를 s_1, s_2 , 가장 큰 두 정수를 s_{m-1}, s_m 이라 하자.

두 정수 해가 $\{s_1, s_2\}$ 가 되게 하는 k 는 $k + 3 = s_2$ 를 만족해야 하므로 $k_1 = s_2 - 3$ 이다.

두 정수 해가 $\{s_{m-1}, s_m\}$ 가 되게 하는 k 는 $k - 3 = s_{m-1}$ 을 만족해야 하므로 $k_2 = s_{m-1} + 3$ 이다.

두 k 값의 차가 8이므로 $|k_2 - k_1| = |(s_{m-1} + 3) - (s_2 - 3)| = |s_{m-1} - s_2 + 6| = 8$ 이다.

s_2 와 s_{m-1} 은 $m-3$ 만큼 차이가 나므로 $|(m-3) + 6| = |m+3| = 8$ 이고, $m > 0$ 이므로 $m = 5$ 이다.

자연수 a 가 4 보다 작은 경우, S_a 의 원소 개수는 $3 - (a+1) + 1 = 3 - a = 5$ 이므로 $a = -2$ 가 되어 모순이다.

자연수 a 가 4 보다 큰 경우, S_a 의 원소 개수는 $(a-1) - 5 + 1 = a - 5 = 5$ 이므로 $a = 10$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 값은 10이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 인수분해를 통해 삼차방정식의 근을 구하고 등차수열의 성질을 적용하여 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

주어진 삼차방정식의 항을 k 에 대하여 정리하면 $k(-x^2 + 4x + 5) + (x^3 - 4x^2 - 5x) = 0$ 이다.

이 식은 $-k(x^2 - 4x - 5) + x(x^2 - 4x - 5) = 0$ 으로, $(x-k)(x^2 - 4x - 5) = 0$ 으로 인수분해된다.

따라서 $(x-k)(x-5)(x+1) = 0$ 이므로, 서로 다른 세 실근은 $k, 5, -1$ 이다. (단, $k \neq 5, k \neq -1$)

세 근이 등차수열을 이루므로, 세 수 중 하나가 나머지 두 수의 등차중항이 되어야 한다.

- (i) k 가 등차중항일 경우: $k = (-1 + 5)/(2) = 2$. 세 근은 $-1, 2, 5$ 이고 조건을 만족한다.
- (ii) 5 가 등차중항일 경우: $5 = (-1 + k)/(2) \Rightarrow 10 = k - 1 \Rightarrow k = 11$. 세 근은 $-1, 5, 11$ 이고 조건을 만족한다.
- (iii) -1 이 등차중항일 경우: $-1 = (5 + k)/(2) \Rightarrow -2 = 5 + k \Rightarrow k = -7$. 세 근은 $-7, -1, 5$ 이고 조건을 만족한다.
- 따라서 가능한 모든 실수 k 의 값은 $2, 11, -7$ 이므로, 그 합은 $2 + 11 + (-7) = 6$ 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 대칭이동을 이용하여 동점을 지나는 경로의 길이 합이 최소가 될 때의 동점의 좌표를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이]

원 C_1 의 중심은 $O_1(-5, 4)$ 이고 반지름의 길이는 1 이며, 원 C_2 의 중심은 $O_2(5, 6)$ 이고 반지름의 길이는 2 이다. 점 P는 직선 $y = x$ 위에 있고, 점 Q는 직선 $y = -x$ 위에 있다.

$AP + PQ + QB$ 의 값이 최소가 되려면 대칭이동을 이용하여 경로를 직선으로 만들어야 한다. 원 C_1 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C'_1 , 원 C_2 를 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C'_2 라 하자. 그러면 점 A가 이동한 점 A'는 원 C'_1 위에 있고, 점 B가 이동한 점 B'는 원 C'_2 위에 있다. 이때 $AP = A'P$ 이고 $QB = B'Q$ 이므로, $AP + PQ + QB = A'P + PQ + B'Q$ 이다. 이 값은 네 점 A', P, Q, B'가 한 직선 위에 있을 때 최소가 된다.

C_1 의 중심 $O_1(-5, 4)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 C'_1 의 중심은 $O'_1(4, -5)$ 이다. C_2 의 중심 $O_2(5, 6)$ 을 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 C'_2 의 중심은 $O'_2(-6, -5)$ 이다. 경로의 길이 합이 최소가 될 때, 점 P와 Q는 두 중심 O'_1 과 O'_2 를 잇는 직선 위에 존재한다. 두 점 $O'_1(4, -5)$, $O'_2(-6, -5)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = -5$ 이다.

점 Q는 직선 $y = -5$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점이므로, $-x = -5$ 에서 $x = 5$ 이고 $y = -5$ 이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(5, -5)$ 이다. 즉, $c = 5, d = -5$ 이다.

그러므로 구하는 값은 $c - d = 5 - (-5) = 10$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 함수의 합과 차로 정의된 새로운 함수의 성질과 방정식의 근의 조건을 통합적으로 이용하여 함수값을 구한다.

[풀이]

함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다. 조건 (가)에 의해 $h(x) = 3(x - 1)^2 + k$ 꼴로 놓을 수 있다.

$f(x) + g(x) = h(x) + 2g(x)$ 이고, $g(x) = 12x + c$ 라 하면 $f(x) + g(x) = 3(x - 1)^2 + k + 2(12x + c) = 3x^2 + 18x + k + 2c + 3$ 이다.

방정식 $f(x) + g(x) = 0$ 이 중근을 가지므로, 그 중근은 $x = -\frac{18}{2 \cdot 3} = -3$ 이다.

조건 (나)에 의해 이 중근은 방정식 $h(x) = 60$ 의 근이므로, $h(-3) = 60$ 이 성립한다.

$h(-3) = 3(-3 - 1)^2 + k = 48 + k = 60$ 에서 $k = 12$ 이다.

$h(x) = 3(x - 1)^2 + 12$ 로 확정된다.

또한, $f(x) + g(x) = 3x^2 + 18x + 12 + 2c + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D/4 = 0$ 이어야 한다.

$D/4 = 9^2 - 3(15 + 2c) = 81 - 45 - 6c = 36 - 6c = 0$ 이므로 $c = 6$ 이다.

따라서 $g(x) = 12x + 6$ 이다.

구하는 값은 $f(3) = h(3) + g(3) = (3(3 - 1)^2 + 12) + (12(3) + 6) = 24 + 42 = 66$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지 정리, 복소수 근의 성질을 종합적으로 이용하여 다항식을 추론하고 함수값을 구하는 문항이다.

[풀이]

조건 (가)에서 $f(x)$ 를 삼차식 $x^3 - 1$ 로 나누었으므로 나머지 $R(x)$ 는 이차 이하의 다항식이다. $R(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면, 몫은 $Q(x) = R'(x) = 2ax + b$ 이다. 따라서 $f(x) = (x^3 - 1)(2ax + b) + ax^2 + bx + c$ 로 나타낼 수 있다.

조건 (나)에서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 하면, $\omega^3 = 1$ 이고 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이다. $f(x) + 2x^2$ 이 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지므로 $f(\omega) + 2\omega^2 = 0$, 즉 $f(\omega) = -2\omega^2$ 이다. 또한 $f(\omega) = (\omega^3 - 1)Q(\omega) + R(\omega) = R(\omega) = a\omega^2 + b\omega + c$ 이다. 따라서 $a\omega^2 + b\omega + c = -2\omega^2$

이고, $(a+2)\omega^2 + b\omega + c = 0$ 이다. $\omega^2 = -\omega - 1$ 을 대입하면 $(a+2)(-\omega - 1) + b\omega + c = 0$, 즉 $(-a-2+b)\omega + (-a-2+c) = 0$ 이다. a, b, c 는 실수이므로 $-a+b-2=0$ 이고 $-a+c-2=0$ 이 성립하여 $b=a+2, c=a+2$ 이다.

$f(1) = R(1) = a + b + c$ 이므로, $f(1) = 13$ 조건에 따라 $a + (a+2) + (a+2) = 3a + 4 = 13$ 이므로 $a = 3$ 이다. 따라서 $b = 5, c = 5$ 이다. $Q(x) = 6x + 5$ 이고 $R(x) = 3x^2 + 5x + 5$ 이므로, 구하는 값은 $f(-1) = ((-1)^3 - 1)Q(-1) + R(-1) = (-2)(-1) + (3 - 5 + 5) = 2 + 3 = 5$ 이다.

19. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 원의 접선의 방정식과 두 점 사이의 거리 공식을 활용하여, 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 A는 제1사분면 위의 점이고 x 좌표가 2이므로, 원 $C: x^2 + y^2 = 20$ 에 대입하면 $2^2 + y^2 = 20$ 에서 $y = 4$ 이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(2, 4)$ 이다.

점 A $(2, 4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 20$ 에 그은 접선 l 의 방정식은 $2x + 4y = 20$, 즉 $x + 2y = 10$ 이다.

점 B의 좌표를 (x_B, y_B) 라 하면, 점 B는 원 C 위의 점이므로 $x_B^2 + y_B^2 = 20$ 이다. 또한, 조건 (가)에 의해 $\overline{AB}^2 = (x_B - 2)^2 + (y_B - 4)^2 = 40$ 이다.

위 식을 전개하면 $x_B^2 - 4x_B + 4 + y_B^2 - 8y_B + 16 = 40$ 이고, $x_B^2 + y_B^2 = 20$ 을 대입하면 $20 - 4x_B - 8y_B + 20 = 40$ 이므로 $4x_B + 8y_B = 0$, 즉 $x_B = -2y_B$ 이다.

$x_B = -2y_B$ 를 원의 방정식에 대입하면 $(-2y_B)^2 + y_B^2 = 20$, 즉 $5y_B^2 = 20$ 에서 $y_B^2 = 4$ 이므로 $y_B = \pm 2$ 이다.

조건 (나)에서 점 B는 제2사분면 위의 점이므로 $x_B < 0, y_B > 0$ 이다. 따라서 $y_B = 2$ 이고, 이때 $x_B = -2(2) = -4$ 이다. 즉, B $(-4, 2)$ 이다.

점 D는 점 B $(-4, 2)$ 를 지나고 y 축에 평행한 직선인 $x = -4$ 와 직선 $l: x + 2y = 10$ 의 교점이다. 따라서 점 D의 x 좌표는 $a = -4$ 이다.

$x = -4$ 를 직선 l 의 방정식에 대입하면 $-4 + 2y = 10$ 에서 $2y = 14$, $y = 7$ 이므로 $b = 7$ 이다.

따라서 $a + b = -4 + 7 = 3$ 이다.

20. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 조각적으로 정의된 이차함수의 그래프와 직선의 교점 조건을 종합하여 함숫값을 추론하는 문제를 해결한다.

[풀이]

****핵심 조건 정리****

조건 (가)와 $f(3) = g(3)$ 으로부터 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 최고차항의 계수 a 와 상수 $C = f(0)$ 을 이용하여 $f(x) = ax^2 + C$, $g(x) = a(x - 4)(x - 12) + C$ 로 표현할 수 있다.

****필요한 식 전개****

조건 (나)에서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 2(3) - 8)$, 즉 $(3, -2)$ 를 지나므로 $h(3) = f(3) = -2$ 이다. 이를 $f(x)$ 식에 대입하면 $9a + C = -2$ 이다.

조건 (다)에서 $h(8) = g(8) = 23$ 이므로, $g(x)$ 식에 $x = 8$ 을 대입하면 $a(8 - 4)(8 - 12) + C = -16a + C = 23$ 이다.

****정답 도출****

두 식 $9a + C = -2$ 와 $-16a + C = 23$ 을 연립하여 풀면 $25a = -25$ 에서 $a = -1$, $C = 7$ 을 얻는다.

따라서 $f(x) = -x^2 + 7$ 이고 $g(x) = -(x - 4)(x - 12) + 7 = -x^2 + 16x - 41$ 이다.

구하는 값은 $h(-1) + h(6) = f(-1) + g(6) = -((-1)^2 + 7) + (-6^2 + 16(6) - 41) = 6 + 19 = 25$ 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 조각적으로 정의된 이차함수의 함숫값을 구할 수 있다.

[풀이] 조건 (가)에 따라 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 유일한 극솟값 3 을 가지므로, 아래로 볼록한 함수 $f(x)$ 의 꼭짓점은 $(1, 3)$ 이어야 한다. 따라서 $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ 이고, 꼭짓점의 x 좌표인 1 은 구간 $[\alpha, \beta]$ 에 속한다. ($\alpha \leq 1 \leq \beta$)

조건 (나)에 따라 함수 $h(x)$ 는 $x=5$ 에서 극댓값 20 을 가지므로, 위로 볼록한 함수 $g(x)$ 의 꼭짓점은 $(5, 20)$ 이어야 한다. 따라서 $g(x) = -(x-5)^2 + 20$ 이고, 꼭짓점의 x 좌표인 5 는 구간 $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$ 에 속한다. ($5 < \alpha$ 또는 $5 > \beta$)
 $\alpha \leq 1$ 이므로 반드시 $5 > \beta$ 가 성립해야 한다.

두 그래프의 교점의 x 좌표 α, β 를 구하기 위해 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 푼다.

$$2(x-1)^2 + 3 = -(x-5)^2 + 20$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + 3 = -(x^2 - 10x + 25) + 20$$

$$3x^2 - 14x + 10 = 0$$

$h(0)$ 의 값을 구하기 위해 $x=0$ 이 속하는 구간을 판별해야 한다. 위 이차방정식의 근 중 작은 값인 α 는 근의 공식에 의해 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{14 - \sqrt{14^2 - 4(3)(10)}}{2(3)} = \frac{14 - \sqrt{76}}{6} = \frac{7 - \sqrt{19}}{3}$$

$$4 < \sqrt{19} < 5 \text{ 이므로 } \frac{2}{3} < \alpha < 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $0 < \alpha$ 이므로, $x=0$ 은 $h(x) = g(x)$ 가 정의되는 구간에 속한다.

$$h(0) = g(0) = -(0-5)^2 + 20 = -25 + 20 = -5 \text{ 이다.}$$

그러므로 $h(0)$ 의 값은 -5 이다.

22. 정답 및 풀이

정답: 18

[출제의도] 인수정리와 나머지정리를 이용하여 다항식의 미정계수를 결정하고, 이를 바탕으로 다항식의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

다항식 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 가 $x+1$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의해 $P(-1) = 0$ 이다. 또한 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 나머지정리에 의해 $P(1) = 6$ 이다.

$P(-1) = -1 + a - b + 2 = 0$ 에서 $a - b = -1$ 이고, $P(1) = 1 + a + b + 2 = 6$ 에서 $a + b = 3$ 이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 2$ 이므로 $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ 이다.

따라서 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의해 $P(2)$ 와 같으므로, $P(2) = 2^3 + 2^2 + 2(2) + 2 = 8 + 4 + 4 + 2 = 18$ 이다.

23. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 미지수를 포함한 연립일차부등식의 해를 구하고, 정수 해의 합에 대한 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있다.

[풀이]

핵심 조건은 연립부등식

$$\begin{cases} 3x \leq x + 16 \\ x + 2a \leq 3x - 6 \end{cases}$$

의 모든 정수 해의 합이 30이라는 것이다.

첫째 부등식 $3x \leq x + 16$ 에서 $2x \leq 16$ 이므로 $x \leq 8$ 이다. 둘째 부등식 $x + 2a \leq 3x - 6$ 에서 $2a + 6 \leq 2x$ 이므로 $x \geq a + 3$ 이다. 따라서 연립부등식의 해는 $a + 3 \leq x \leq 8$ 이다. 정수 해는 $x \leq 8$ 을 만족시키므로, 그 합이 30이 되기 위해서는 $8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 30$ 이어야 한다. 즉, 정수 해의 집합은 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ 이다.

이 정수들을 모두 포함하려면 해의 하한인 $a + 3$ 은 4보다 작거나 같고, 3보다는 커야 한다. 즉, $3 < a + 3 \leq 4$ 이다. 이 부등식의 각 변에서 3을 빼면 $0 < a \leq 1$ 을 얻는다. 주어진 조건에서 a 는 자연수이므로 $a = 1$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 이차함수의 꼭짓점 좌표를 구하고, 판별식을 이용하여 이차함수와 직선의 접선 조건을 만족하는 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 이차함수 $y = x^2 + 10x + 27$ 을 표준형으로 바꾸면 $y = (x + 5)^2 + 2$ 이므로, 그래프의 꼭짓점 좌표는 $(-5, 2)$ 이다.

꼭짓점 $(-5, 2)$ 를 지나고 기울기가 2 인 직선의 방정식은 $y - 2 = 2(x + 5)$, 즉 $y = 2x + 12$ 이다.

이 직선이 이차함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 그래프에 접하므로, 이차방정식 $-x^2 + 4x + k = 2x + 12$ 가 중근을 가져야 한다.

식을 정리하면 $x^2 - 2x + (12 - k) = 0$ 이다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D/4 = (-1)^2 - (12 - k) = k - 11 = 0$ 이므로, $k = 11$ 이다.

25. 정답 및 풀이

정답: 4

[출제의도] 실수 계수 이차방정식의 켤레근의 성질과 복소수의 거듭제곱의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이] 핵심 조건 정리: 이차방정식 $x^2 - px + 3p + 4 = 0$ 의 계수가 모두 실수이므로, 한 허근을 $z = a + bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 다른 한 근은 켤레복소수인 $z^* = a - bi$ 이다. 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합은 $z + z^* = 2a = p$ 이고, 두 근의 곱은 $zz^* = a^2 + b^2 = 3p + 4$ 이다.

필요한 식 전개: $z^3 = (a + bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$ 이다. z^3 이 음의 실수이려면 허수부분은 0이고 실수부분은 음수여야 한다. 허수부분 $3a^2b - b^3 = b(3a^2 - b^2) = 0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로 $b^2 = 3a^2$ 이다. 이때 실수부분은 $a^3 - 3ab^2 = a^3 - 3a(3a^2) = -8a^3$ 이다. $z^3 < 0$ 이므로 $-8a^3 < 0$, 즉 $a > 0$ 이다.

정답 도출: $a^2 + b^2 = 3p + 4$ 에 $b^2 = 3a^2$ 을 대입하면 $4a^2 = 3p + 4$ 이다. $p = 2a$ 에서 $a = p/2$ 이므로 이를 대입하면 $4(p/2)^2 = 3p + 4$ 이고, 식을 정리하면 $p^2 - 3p - 4 = 0$ 이다. 이 이차방정식을 풀면 $(p - 4)(p + 1) = 0$ 이므로 $p = 4$ 또는 $p = -1$ 이다. 조건 $a > 0$ 에서 $p = 2a > 0$ 이므로, 구하는 p 의 값은 4 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: 9

[출제의도] 특정 자릿수의 숫자, 자릿수 간의 대소 관계 및 수의 배수 판정법을 종합적으로 이용하여 경우의 수를 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

세 자리 자연수의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수를 각각 a, b, c 라 하자. 조건 (나)에 의해 a 와 c 는 모두 홀수이다. 즉, $a, c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이다. 조건 (다)에 의해 $a + b + c$ 는 9의 배수이다. 7의 위치에 따라 경우를 나눈다.

1. $a = 7$ 인 경우: $c \in \{1, 3, 5, 9\}$ 이고 $b \neq 7$ 이다. $7 + b + c$ 가 9의 배수여야 한다.

$c = 1$ 이면 $8 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 1$ 이다.

$c = 3$ 이면 $10 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 8$ 이다.

$c = 5$ 이면 $12 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 6$ 이다.

$c = 9$ 이면 $16 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 2$ 이다. 따라서 4개이다.

2. $c = 7$ 인 경우: $a \in \{1, 3, 5, 9\}$ 이고 $b \neq 7$ 이다. $a + b + 7$ 이 9의 배수여야 한다.

$a = 1$ 이면 $8 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 1$ 이다.

$a = 3$ 이면 $10 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 8$ 이다.

$a = 5$ 이면 $12 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 6$ 이다.

$a = 9$ 이면 $16 + b$ 가 9의 배수이므로 $b = 2$ 이다. 따라서 4개이다.

3. $b=7$ 인 경우: $a, c \in \{1, 3, 5, 9\}$ 이다. $a+c+7$ 이 9의 배수여야 한다.
 a, c 가 모두 홀수이므로 $a+c$ 는 짝수이고, $a+c+7$ 은 홀수이다. 따라서 $a+c+7$ 은 9 또는 27이 될 수 있다.
 $a+c+7=9$ 이면 $a+c=2$ 이므로 $(a, c) = (1, 1)$ 이다.
 $a+c+7=27$ 이면 $a+c=20$ 인데, a, c 의 최댓값이 9이므로 불가능하다. 따라서 1개이다.
 따라서 모든 경우의 수의 합은 $4+4+1=9$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 13

[출제의도] 대칭이동의 성질을 이용하여 점의 좌표를 설정하고, 삼각형의 외접원 반지름에 대한 관계식으로부터 미지수의 값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

점 $P(p, \sqrt{3})$ 이므로, 원점 대칭이동한 점 Q 의 좌표는 $(-p, -\sqrt{3})$ 이고, y 축 대칭이동한 점 R 의 좌표는 $(-p, \sqrt{3})$ 입니다.

삼각형 PQR 에서 선분 PR 은 x 축과 평행하고 선분 QR 은 y 축과 평행하므로 $\angle PRQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형입니다. 따라서 외접원의 지름은 빗변 PQ 의 길이와 같습니다.

$$PQ = \sqrt{(p - (-p))^2 + (\sqrt{3} - (-\sqrt{3}))^2} = \sqrt{(2p)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{p^2 + 3} \text{ 이므로, } r_1 = \frac{1}{2}PQ = \sqrt{p^2 + 3} \text{ 입니다.}$$

삼각형 POR 는 $OP=OR=\sqrt{p^2+3}$ 인 이등변삼각형입니다. 삼각형 POR 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times PR \times (PR \text{ 위의 높}) = \frac{1}{2} \times 2p \times \sqrt{3} = p\sqrt{3}$ 입니다. 삼각형 넓이 공식 $S = \frac{abc}{4R}$ 를 이용하면,

$$p\sqrt{3} = \frac{OP \cdot OR \cdot PR}{4r_2} = \frac{(\sqrt{p^2+3})(\sqrt{p^2+3})(2p)}{4r_2} = \frac{p(p^2+3)}{2r_2} \text{ 입니다.}$$

$$\text{따라서 } r_2 = \frac{p^2+3}{2\sqrt{3}} \text{ 입니다.}$$

주어진 조건 $r_1 + \sqrt{3}r_2 = 12$ 에 위에서 구한 식을 대입하면,

$$\sqrt{p^2+3} + \sqrt{3} \left(\frac{p^2+3}{2\sqrt{3}} \right) = 12$$

$$\sqrt{p^2+3} + \frac{p^2+3}{2} = 12$$

$$X = \sqrt{p^2+3} \text{ 라 하면 } (p > 0 \text{ 이므로 } X > \sqrt{3}), X + \frac{X^2}{2} = 12 \text{ 이고, } X^2 + 2X - 24 = 0 \text{ 입니다.}$$

$$(X+6)(X-4) = 0 \text{ 에서 } X > 0 \text{ 이므로 } X = 4 \text{ 입니다.}$$

$$\sqrt{p^2+3} = 4 \text{ 이므로 양변을 제곱하면 } p^2 + 3 = 16 \text{ 입니다.}$$

따라서 구하는 p^2 의 값은 13 입니다.

28. 정답 및 풀이

정답: 90

[출제의도] 포물선과 직선의 교점을 이용하여 정의된 삼각형의 넓이를 매개변수에 대한 함수로 나타내고, 이차함수의 최댓값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

포물선 $y = -x^2 + 9$ 가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 $-x^2 + 9 = 0$ 의 해이므로 $x = \pm 3$ 이다. 조건에 따라 $A(-3, 0), B(3, 0)$ 이다.

직선 l 과 포물선 C 의 교점의 x 좌표는 $a(x+3) = -x^2 + 9 = -(x-3)(x+3)$ 을 만족한다. 점 P 는 점 A 가 아니므로 $x \neq -3$ 이고, 양변을 $x+3$ 으로 나누면 $a = -(x-3)$ 이므로 $x = 3 - a$ 이다. 점 P 의 y 좌표는 $y_P = a((3-a)+3) = a(6-a) = 6a - a^2$ 이다.

삼각형 ABP 의 밑변을 선분 AB 로 잡으면 길이는 $3 - (-3) = 6$ 이다. 높이는 점 P 의 y 좌표인 $6a - a^2$ 이다. (단, $0 < a < 6$ 이므로 높이는 양수이다.)

$$\text{삼각형 } ABP \text{ 의 넓이를 } S(a) \text{ 라 하면, } S(a) = \frac{1}{2} \times 6 \times (6a - a^2) = -3a^2 + 18a \text{ 이다.}$$

$$S(a) = -3(a^2 - 6a) = -3(a-3)^2 + 27 \text{ 이므로, } 0 < a < 6 \text{ 의 범위에서 } S(a) \text{ 는 } a = 3 \text{ 일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 } k = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{구하는 값은 } 30k = 30 \times 3 = 90 \text{ 이다.}$$

29. 정답 및 풀이

정답: 72

[출제의도] 주어진 조건을 해석하여 특정 수의 배수 조건이 포함된 순열과 조합의 수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$S + P$ 와 $S - P$ 가 모두 7의 배수이므로, 이들의 합인 $2S$ 와 차이인 $2P$ 도 7의 배수이다. 2와 7은 서로소이므로, $S = a_1 + a_2 + a_3$ 와 $P = a_4 \times a_5$ 는 모두 7의 배수여야 한다.

$P = a_4 \times a_5$ 가 7의 배수이려면 7이 소수이므로 a_4 와 a_5 중 적어도 하나는 7이어야 한다. 따라서 5장의 카드 중에는 반드시 7이 포함되어야 한다. 또한, $S = a_1 + a_2 + a_3$ 는 7의 배수이고, 이 세 수는 7이 아닌 서로 다른 자연수여야 한다. 1부터 6까지의 자연수 중에서 세 수의 합이 7의 배수가 되는 집합은 합이 7인 $\{1, 2, 4\}$ 와 합이 14인 $\{3, 5, 6\}$ 두 가지뿐이다.

두 가지 경우로 나누어 순서쌍의 개수를 구한다.

(i) $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 4\}$ 인 경우:

세 수 1, 2, 4를 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$ 이다. 이때 사용된 카드는 $\{1, 2, 4\}$ 와 반드시 포함되어야 하는 7이다. 나머지 한 장의 카드는 $\{3, 5, 6\}$ 중 하나를 택해야 하므로 경우의 수는 $\binom{3}{1} = 3$ 이다. 이 카드와 7을 $\{a_4, a_5\}$ 에 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$ 이다. 따라서 이 경우의 수는 $6 \times 3 \times 2 = 36$ 이다.

(ii) $\{a_1, a_2, a_3\} = \{3, 5, 6\}$ 인 경우:

세 수 3, 5, 6을 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$ 이다. 이때 사용된 카드는 $\{3, 5, 6\}$ 과 7이다. 나머지 한 장의 카드는 $\{1, 2, 4\}$ 중 하나를 택해야 하므로 경우의 수는 $\binom{3}{1} = 3$ 이다. 이 카드와 7을 $\{a_4, a_5\}$ 에 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$ 이다. 따라서 이 경우의 수는 $6 \times 3 \times 2 = 36$ 이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $36 + 36 = 72$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 그래프와 원의 방정식을 이해하고, 원이 두 직선에 동시에 접하는 조건을 활용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 묻는다.

[풀이]

이차함수 $f(x) = a(x - b)^2$ 의 대칭축이 $x = 3$ 이므로 $b = 3$ 이다. 원의 중심 $(x, f(x))$ 는 두 직선 $x - y = 0$ 과 $7x + y = 0$ 의 각의 이등분선 위에 있어야 한다. 두 직선의 각의 이등분선 방정식은 $\frac{x - y}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{7x + y}{\sqrt{7^2 + 1^2}}$ 에서 $y = 3x$ 와 $y = -\frac{1}{3}x$ 이다. 따라서 세 원의 중심의 x 좌표 x_1, x_2, x_3 은 두 방정식 $a(x - 3)^2 = 3x$ 와 $a(x - 3)^2 = -\frac{1}{3}x$ 의 서로 다른 실근이다.

총 실근의 개수가 3개이므로, 한 방정식은 중근(접합)을, 다른 방정식은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 방정식 $a(x - b)^2 = kx$ 의 판별식은 $D = k(4ab + k)$ 이다. $b = 3$ 이므로 $D = k(12a + k)$ 이다. $k = 3$ 일 때 접하면 $12a + 3 = 0$ 이므로 $a = -\frac{1}{4}$ 이다. 이때 $k = -\frac{1}{3}$ 에 대한 판별식은 $D = -\frac{1}{3}(12(-\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}) = \frac{10}{9} > 0$ 이므로 조건을 만족한다. $k = -\frac{1}{3}$ 일 때 접하면 $12a - \frac{1}{3} = 0$ 이므로 $a = \frac{1}{36}$ 이다.

$a = -\frac{1}{4}$ 일 때, $a(x - 3)^2 = 3x$ 의 중근은 $x = \frac{2ab + k}{2a} = \frac{2(-\frac{1}{4})(3) + 3}{2(-\frac{1}{4})} = -3$ 이고, $a(x - 3)^2 = -\frac{1}{3}x$ 의 두 근의 합은 $\frac{2ab + k'}{a} = \frac{2(-\frac{1}{4})(3) - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{4}} = \frac{22}{3}$ 이다. 모든 근의 합은 $-3 + \frac{22}{3} = \frac{13}{3}$ 이므로 문제의 조건에 부합한다. ($a = \frac{1}{36}$ 일 때 근의 합은 111 이므로 조건에 맞지 않는다.) 따라서 $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 3)^2$ 이고, 구하는 값은 $f(7) = -\frac{1}{4}(7 - 3)^2 = -4$ 이다.