

MathGen 2026년 고1 9월 모의고사 대비 시험 02 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2609-02-SOL

출제 : Math-Gen

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
③	③	⑤	②	⑤	③	③	③	⑤	④
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	③	④	①	③	③	③	③	④
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
③	231	17	9	④	③	20	35	③	3

1. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식의 덧셈과 뺄셈 연산을 이용하여 미지의 다항식을 구하고, 이를 통해 주어진 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 두 식 $A + B = 3x^2 - xy + y^2$ 와 $A - B = -x^2 + xy + 3y^2$ 를 연립하여 다항식 A 와 B 를 먼저 구합니다.

두 식을 더하면,

$$(A + B) + (A - B) = (3x^2 - xy + y^2) + (-x^2 + xy + 3y^2)$$

$$2A = (3 - 1)x^2 + (-1 + 1)xy + (1 + 3)y^2$$

$$2A = 2x^2 + 4y^2$$

$$\text{따라서 } A = x^2 + 2y^2 \text{ 입니다.}$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면,

$$(A + B) - (A - B) = (3x^2 - xy + y^2) - (-x^2 + xy + 3y^2)$$

$$2B = 3x^2 - xy + y^2 + x^2 - xy - 3y^2$$

$$2B = (3 + 1)x^2 + (-1 - 1)xy + (1 - 3)y^2$$

$$2B = 4x^2 - 2xy - 2y^2$$

$$\text{따라서 } B = 2x^2 - xy - y^2 \text{ 입니다.}$$

이제 구하고자 하는 다항식 $2A - B$ 를 계산합니다.

$$2A - B = 2(x^2 + 2y^2) - (2x^2 - xy - y^2)$$

$$= (2x^2 + 4y^2) - (2x^2 - xy - y^2)$$

$$= 2x^2 + 4y^2 - 2x^2 + xy + y^2$$

$$= (2 - 2)x^2 + xy + (4 + 1)y^2$$

$$= xy + 5y^2$$

따라서 정답은 ③입니다.

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 켈레복소수를 포함한 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

복소수 z 는 실수 계수 이차방정식 $z^2 - 2z + 5 = 0$ 의 근이므로, z 의 켈레복소수 $\bar{z}$ 도 이 이차방정식의 다른 근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $z + \bar{z} = 2$ 이고, 두 근의 곱은 $z\bar{z} = 5$ 이다.

구하려는 식은 $z\bar{z} + \frac{z^2 + (\bar{z})^2}{z\bar{z}}$ 와 같다. 곱셈 공식을 변형하여 분자를 계산하면 $z^2 + (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} = 2^2 - 2(5) = 4 - 10 = -6$ 이다. 따라서 구하는 식의 값은 $5 + \frac{-6}{5} = \frac{25-6}{5} = \frac{19}{5}$ 이다.

3. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 P는 y 축 위의 점이므로 그 좌표를 $(0, y)$ 로 놓을 수 있다. 문제의 조건은 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로, 양변을 제곱한 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 도 성립한다.

두 점 사이의 거리 공식에 따라 각 선분의 길이의 제곱을 구하면 다음과 같다.

$$\overline{AP}^2 = (0 - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 4 + y^2 - 2y + 1 = y^2 - 2y + 5$$

$$\overline{BP}^2 = (0 - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 6y + 25$$

두 식이 같다고 하면 $y^2 - 2y + 5 = y^2 - 6y + 25$ 이므로, $4y = 20$ 이다.

따라서 $y = 5$ 이므로 점 P 의 y 좌표는 5 이다.

4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 항등식의 성질과 이차함수의 그래프의 성질을 통합적으로 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 등식 $a(x - c)^2 + 1 = 2x^2 + bx + 9$ 는 x 에 대한 항등식이므로 양변은 같은 이차함수를 나타낸다.

우변 $y = 2x^2 + bx + 9$ 에서 이차항의 계수는 2 이므로, 항등식의 성질에 의해 좌변의 이차항의 계수인 a 의 값은 2 이다.

즉, $a = 2$ 이다.

따라서 주어진 이차함수는 $y = 2(x - c)^2 + 1$ 로 표현할 수 있다. 이 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 $(c, 1)$ 이다.

문제의 조건에서 꼭짓점 $(c, 1)$ 은 직선 $y = -x + 3$ 위에 있으므로, $x = c, y = 1$ 을 직선의 방정식에 대입하면 등식이 성립해야 한다.

$$1 = -c + 3$$

위 식을 풀면 $c = 2$ 를 얻는다.

이제 $a = 2, c = 2$ 이므로, 이를 이용해 항등식의 좌변을 전개하면 다음과 같다.

$$a(x - c)^2 + 1 = 2(x - 2)^2 + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) + 1 = 2x^2 - 8x + 9$$

이 식이 $2x^2 + bx + 9$ 와 같아야 하므로, 양변의 x 항의 계수를 비교하면 $b = -8$ 임을 알 수 있다.

따라서 구하는 값은 $a + b = 2 + (-8) = -6$ 이다.

5. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 직선의 평행이동과 원과 직선의 접선 조건을 통합적으로 이해하여 미지수의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[풀이]

직선 $y = 2x - 1$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $3a$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y - 3a = 2(x - a) - 1$ 이고, 이를 정리하면 $2x - y + a - 1 = 0$ 이다.

이 직선이 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같아야 한다.

점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하면 $\frac{|2(0) - 1(0) + a - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - 1|}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 $\frac{|a - 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ 이므로, $|a - 1| = 5$ 이다.

$a - 1 = 5$ 또는 $a - 1 = -5$ 이므로, $a = 6$ 또는 $a = -4$ 이다.

문제에서 a 는 양수이므로 $a = 6$ 이다.

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 중근을 갖는 삼차방정식의 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 의 세 근이 중근 α 와 다른 한 실근 β 이므로 세 근은 α, α, β 이다. 근과 계수의 관계에 의하여 다음이 성립한다.

$$2\alpha + \beta = -a \quad \text{--- (㉠)}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta = b \quad \text{--- (㉡)}$$

$$\alpha^2\beta = -4 \quad \text{--- (㉢)}$$

주어진 조건 $\alpha + \beta = 1$ 에서 $\beta = 1 - \alpha$ 이다. 이를 (㉢)에 대입하면

$$\alpha^2(1 - \alpha) = -4, \text{ 즉 } \alpha^3 - \alpha^2 - 4 = 0 \text{ 이다.}$$

$f(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 - 4$ 라 하면 $f(2) = 8 - 4 - 4 = 0$ 이므로 조립제법을 이용하면 $(\alpha - 2)(\alpha^2 + \alpha + 2) = 0$ 이다. α 는 실근이므로 $\alpha = 2$ 이다.

$$\alpha = 2 \text{ 이므로 } \beta = 1 - 2 = -1 \text{ 이다.}$$

구한 α, β 의 값을 (㉠), (㉡)에 대입하여 a, b 를 구한다.

$$a = -(2\alpha + \beta) = -(2 \cdot 2 + (-1)) = -3$$

$$b = \alpha^2 + 2\alpha\beta = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

$$\text{따라서 } a + b = -3 + 0 = -3 \text{ 이다.}$$

7. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 부등식과 수의 홀짝 성질을 동시에 만족시키는 순서쌍의 개수를 체계적으로 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

핵심 조건 정리 $\rightarrow$ 주사위의 눈의 수 a, b ($1 \leq a, b \leq 6$)에 대해 $a^2 + b \leq 12$ 이고, $a + b$ 가 홀수여야 한다. $a + b$ 가 홀수라는 것은 a, b 의 홀짝이 서로 다르다는 의미이다.

필요한 식 전개 $\rightarrow a$ 의 값을 기준으로 경우를 나눈다.

$a = 1$ (홀수)일 때: $1 + b \leq 12 \Rightarrow b \leq 11$ 이다. b 는 짝수여야 하므로 가능한 b 는 2, 4, 6 (3개)이다.

$a = 2$ (짝수)일 때: $4 + b \leq 12 \Rightarrow b \leq 8$ 이다. b 는 홀수여야 하므로 가능한 b 는 1, 3, 5 (3개)이다.

$a = 3$ (홀수)일 때: $9 + b \leq 12 \Rightarrow b \leq 3$ 이다. b 는 짝수여야 하므로 가능한 b 는 2 (1개)이다.

$a \geq 4$ 일 때: $a^2 \geq 16$ 이므로 $a^2 + b > 12$ 가 되어 조건을 만족하는 b 가 없다.

정답 도출 $\rightarrow$ 모든 경우의 수를 더하면 구하는 순서쌍의 개수는 $3 + 3 + 1 = 7$ 이다.

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식의 해를 근과 계수의 관계로 해석하고, 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해와 연계하여 미지수의 값을 구하는 문항이다.

[풀이]

부등식 $|x - 2| \leq b$ 에서 $-b \leq x - 2 \leq b$ 이므로, 해는 $2 - b \leq x \leq 2 + b$ 이다.

이차부등식 $x^2 + ax - 5 \leq 0$ 의 해가 $2 - b \leq x \leq 2 + b$ 이므로, 이차방정식 $x^2 + ax - 5 = 0$ 의 두 근은 $2 - b$ 와 $2 + b$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $(2 - b) + (2 + b) = 4 = -a$ 이므로 $a = -4$ 이다.

두 근의 곱은 $(2 - b)(2 + b) = 4 - b^2 = -5$ 이므로 $b^2 = 9$ 이다.

따라서 구하는 값은 $a + b^2 = -4 + 9 = 5$ 이다.

9. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 인수분해를 이용하여 연립이차방정식의 해를 구하고, 그 해의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 54 \end{cases}$$

이다.

첫 번째 식 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 을 인수분해하면 $(x - 2y)(x + y) = 0$ 이므로, $x = 2y$ 또는 $x = -y$ 이다.

(i) $x = 2y$ 를 두 번째 식에 대입하면 $2(2y)^2 + y^2 = 54$ 에서 $9y^2 = 54$, 즉 $y^2 = 6$ 이다. 이때 $x^2 = (2y)^2 = 4y^2 = 24$ 이므로 α 가 될 수 있는 값은 $\pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$ 이다.

(ii) $x = -y$ 를 두 번째 식에 대입하면 $2(-y)^2 + y^2 = 54$ 에서 $3y^2 = 54$, 즉 $y^2 = 18$ 이다. 이때 $x^2 = (-y)^2 = y^2 = 18$ 이므로 α 가 될 수 있는 값은 $\pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$ 이다.

따라서 가능한 모든 α 값은 $2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$ 이다. 이 값들의 곱은

$(2\sqrt{6}) \times (-2\sqrt{6}) \times (3\sqrt{2}) \times (-3\sqrt{2}) = (-24) \times (-18) = 432$ 이다.

10. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 연립이차방정식의 해를 구하고, 주어진 조건을 만족하는 해를 판별하여 식의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 연립방정식의 첫 번째 식을 변형하면 $y = 2x - 4$ 이다.

이 식을 두 번째 식 $3x^2 - xy - 7y = 7$ 에 대입하여 정리하면 $3x^2 - x(2x - 4) - 7(2x - 4) = 7$ 이므로, $x^2 - 10x + 21 = 0$ 이다. 이

이차방정식을 풀면 $(x - 3)(x - 7) = 0$ 이므로 해는 $x = 3$ 또는 $x = 7$ 이다.

각 x 의 값에 대응하는 y 의 값은 $x = 3$ 일 때 $y = 2$, $x = 7$ 일 때 $y = 10$ 이므로, 연립방정식의 해 (α, β) 는 $(3, 2)$ 또는 $(7, 10)$ 이다.

주어진 조건 $\alpha\beta > 25$ 를 만족하는 해를 찾아야 한다. 해가 $(3, 2)$ 일 경우 $\alpha\beta = 6$ 이므로 조건을 만족하지 않고, 해가 $(7, 10)$ 일 경우 $\alpha\beta = 70$ 이므로 조건을 만족한다.

따라서 구하는 해는 $(\alpha, \beta) = (7, 10)$ 이므로, $\alpha + \beta = 7 + 10 = 17$ 이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식과 절댓값 기호를 포함한 부등식을 함께 풀어 공통 해의 범위에 포함된 정수의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ 을 풀면 $(x+2)(x-5) \leq 0$ 이므로 해는 $-2 \leq x \leq 5$ 이다.

두 번째 부등식 $|x-1| \geq 2$ 를 풀면 $x-1 \leq -2$ 또는 $x-1 \geq 2$ 이므로 해는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$ 이다.

두 부등식의 공통 해의 범위는 $-2 \leq x \leq -1$ 또는 $3 \leq x \leq 5$ 이다.

이 범위를 만족시키는 정수 x 는 $-2, -1, 3, 4, 5$ 로 총 5개이다.

따라서 구하는 정수 x 의 개수는 5이다.

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식과 절댓값을 포함한 부등식의 공통 해를 구하여 정수 해의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - x - 20 \leq 0$ 을 인수분해하면 $(x-5)(x+4) \leq 0$ 이므로, 해는 $-4 \leq x \leq 5$ 이다.

두 번째 부등식 $|x-1| \geq 3$ 에서 $x-1 \geq 3$ 또는 $x-1 \leq -3$ 이므로, 해는 $x \geq 4$ 또는 $x \leq -2$ 이다.

두 부등식의 공통 범위를 구하면 $-4 \leq x \leq -2$ 또는 $4 \leq x \leq 5$ 이다.

이 범위에 속하는 정수 x 는 $-4, -3, -2, 4, 5$ 이다.

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 $(-4) + (-3) + (-2) + 4 + 5 = 0$ 이다.

13. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 행렬의 연산과 일차변환의 성질을 연계하여 행렬의 성분을 추론하는 능력을 평가한다.

[풀이]

조건 (나)에서 행렬 A 가 나타내는 일차변환이 직선 $y = x$ 위의 임의의 점 (k, k) 를 원점으로 옮기므로, $A[k \ k] = [0 \ 0]$ 이다.

$[1 \ a \ b - 2][k \ k] = [(1+a)k \ (b-2)k] = [0 \ 0]$ 에서 $1+a=0, b-2=0$ 이므로 $a=-1, b=2$ 이고 $A = [1 \ -1 \ 2 \ -2]$ 이다.

$B = [pq \ rs]$ 라 하면, 조건 (가) $AB = O$ 에서 $[1 \ -1 \ 2 \ -2][pq \ rs] = [p-r \ q-s \ 2(p-r) \ 2(q-s)] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ 이므로 $p=r, q=s$ 이다. 즉, $B = [pq \ pq]$ 이다.

조건 (다)에서 행렬 B 의 주대각선 성분의 합은 $p+s=p+q=12$ 이다.

따라서 행렬 B 의 모든 성분의 합은 $p+q+r+s=(p+q)+(r+s)=(p+q)+(p+q)=2(p+q)=2 \times 12=24$ 이다.

14. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판별식을 이용하여 파악하고, 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

이차함수 $y = x^2 + 2(m+a)x + m^2 + 2m$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - b$ 가 접하므로, x 에 대한 이차방정식

$x^2 + 2(m+a)x + m^2 + 2m = 2x - b$ 는 중근을 가져야 한다.

방정식을 x 에 대하여 정리하면 $x^2 + 2(m+a-1)x + m^2 + 2m + b = 0$ 이다. 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,

$D/4 = (m+a-1)^2 - (m^2 + 2m + b) = 0$ 이 성립해야 한다.

이 식을 m 에 대하여 정리하면 $(2a-4)m + (a-1)^2 - b = 0$ 이고, 이 등식은 실수 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 m 에 대한 항등식이다.

항등식의 성질에 따라 각 항의 계수가 0이어야 하므로 $2a-4=0$ 이고 $(a-1)^2 - b = 0$ 이다.

$2a-4=0$ 에서 $a=2$ 이고, 이를 $(a-1)^2 - b = 0$ 에 대입하면 $(2-1)^2 - b = 0$ 이므로 $b=1$ 이다.

따라서 $ab = 2 \times 1 = 2$ 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 함수의 그래프를 평행이동 및 대칭이동하고, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판별식을 이용하여 파악하는지를 묻는 문제이다.

[풀이]

함수 $y = x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 $y = (x - a)^2 - 3$ 이 되고, 이를 원점에 대해 대칭이동하면 $-y = (-x - a)^2 - 3$ 이므로 정리하면 $y = -(x + a)^2 + 3$ 이다.

이차함수의 그래프가 직선 $y = 2x$ 와 접하므로, 이차방정식 $-(x + a)^2 + 3 = 2x$ 의 판별식이 0 이어야 한다.

식을 정리하면 $x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 3 = 0$ 이고, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D/4 = (a + 1)^2 - (a^2 - 3) = 2a + 4 = 0$ 이다.

따라서 구하는 상수 a 의 값은 -2 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 이차함수를 구하고, 함수값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

최고차항의 계수가 1이고 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 곱이 7이므로, 상수항을 포함한 이차함수를 $f(x) = x^2 + ax + 7$ 로 놓을 수 있다. 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식 $D = a^2 - 4(7) = a^2 - 28 > 0$ 이다.

방정식 $f(x) = x + 1$ 은 $x^2 + ax + 7 = x + 1$ 이므로, $x^2 + (a - 1)x + 6 = 0$ 이다. 이 이차방정식의 두 근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $-(a - 1) = 1 - a$ 이다. 이 값이 방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근과 같으므로 $f(1 - a) = 0$ 이 성립한다. 즉, $(1 - a)^2 + a(1 - a) + 7 = 0$ 이다.

식을 정리하면 $(1 - a)(1 - a + a) + 7 = 0$ 이므로 $1 - a + 7 = 0$ 에서 $a = 8$ 을 얻는다. $a = 8$ 은 $a^2 - 28 > 0$ 조건을 만족한다.

따라서 $f(x) = x^2 + 8x + 7$ 이고, 구하는 값은 $f(-2) = (-2)^2 + 8(-2) + 7 = 4 - 16 + 7 = -5$ 이다.

17. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 매개변수로 정의된 점들을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 매개변수에 대한 함수로 나타내고, 주어진 범위에서 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

점 P의 좌표는 $(k, 0)$ 이다. 점 Q는 직선 $y = x + k$ 위에 있고 x 좌표가 $k - 2$ 이므로, y 좌표는 $(k - 2) + k = 2k - 2$ 이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(k - 2, 2k - 2)$ 이다.

삼각형 OPQ의 넓이를 $S(k)$ 라 하자. 밑변을 선분 OP로 잡으면 $1 \leq k \leq 4$ 이므로 밑변의 길이는 k 이다. 높이는 점 Q의 y 좌표의 절댓값인 $|2k - 2|$ 인데, 주어진 k 의 범위에서 $2k - 2 \geq 2(1) - 2 = 0$ 이므로 높이는 $2k - 2$ 이다.

따라서 넓이 $S(k)$ 는 $S(k) = \frac{1}{2} \times k \times (2k - 2) = k(k - 1) = k^2 - k$ 이다.

$S(k) = k^2 - k = (k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ 이므로, 대칭축이 $k = \frac{1}{2}$ 인 아래로 볼록한 이차함수이다.

주어진 범위 $1 \leq k \leq 4$ 에서 $S(k)$ 는 증가하므로 최댓값은 $k = 4$ 일 때 가진다.

따라서 최댓값은 $S(4) = 4^2 - 4 = 12$ 이다.

18. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 삼차방정식의 근의 성질과 다항식의 항등식 조건을 결합하여 다항식의 계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하자. 조건 (가)에서 방정식 $P(x) = 0$ 의 한 실근을 k , 서로 다른 두 허근을 α, β 라 하면 계수가 모두 실수이므로 두 허근은 켈레복소수 관계에 있다. 두 허근의 합이 $\alpha + \beta = 2$ 이므로 $P(x)$ 는 이차식 $x^2 - 2x + m$ 을 인수로 갖는다. (단, m 은 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$ 이 허근을 갖도록 하는 실수, 즉 판별식 $D/4 = 1 - m < 0$ 에서 $m > 1$)

따라서 $P(x) = (x - k)(x^2 - 2x + m) = x^3 + (-k - 2)x^2 + (2k + m)x - km$ 이다.

$a = -k - 2$

$$, b = 2k + m, c = -km \text{ 이다.}$$

조건 (나)에서 $P(x+1) - P(x) = ((x+1)^3 - (x^3)) + a((x+1)^2 - x^2) + b((x+1) - x)$ 이다.

$$P(x+1) - P(x) = (3x^2 + 3x + 1) + a(2x + 1) + b = 3x^2 + (2a + 3)x + (a + b + 1) \text{ 이다.}$$

$$3x^2 + (2a + 3)x + (a + b + 1) = 3x^2 + x + 2 \text{ 는 } x \text{ 에 대한 항등식이므로 계수를 비교하면,}$$

$$2a + 3 = 1 \text{ 에서 } a = -1,$$

$$a + b + 1 = 2 \text{ 에서 } (-1) + b + 1 = 2 \text{ 이므로 } b = 2 \text{ 이다.}$$

$$a = -k - 2 \text{ 에서 } -1 = -k - 2 \text{ 이므로 } k = -1 \text{ 이다.}$$

$$b = 2k + m \text{ 에서 } 2 = 2(-1) + m \text{ 이므로 } m = 4 \text{ 이다. 이 값은 } m > 1 \text{ 을 만족한다.}$$

$$P(0) = c \text{ 이고 } c = -km = -(-1)(4) = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 $P(0)$ 의 값은 4이다.

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값과 최솟값의 차로 정의된 새로운 함수의 대칭성을 파악하여 이차함수의 식을 구한다.

[풀이]

함수 $f(x) = a(x - b)^2$ 의 대칭축은 $x = b$ 이다. 구간 $[k, k + 2]$ 의 중앙은 $k + 1$ 이므로, 함수 $g(k)$ 는 $k + 1 = b$, 즉 $k = b - 1$ 에 대하여 대칭이다.

$$\text{조건 (가)에서 } g(2) = g(4) \text{ 이므로 } g(k) \text{ 의 대칭축은 } k = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } b - 1 = 3 \text{ 이므로 } b = 4 \text{ 이다.}$$

$b = 4$ 일 때, $k = 1$ 이면 구간은 $[1, 3]$ 이다. 이 구간에서 $f(x)$ 는 감소하므로 최댓값은 $f(1)$, 최솟값은 $f(3)$ 이다.

$$g(1) = f(1) - f(3) = a(1 - 4)^2 - a(3 - 4)^2 = 9a - a = 8a$$

$k = 5$ 이면 구간은 $[5, 7]$ 이다. 이 구간에서 $f(x)$ 는 증가하므로 최댓값은 $f(7)$, 최솟값은 $f(5)$ 이다.

$$g(5) = f(7) - f(5) = a(7 - 4)^2 - a(5 - 4)^2 = 9a - a = 8a$$

$$\text{조건 (나)에서 } g(1) + g(5) = 8a + 8a = 16a = 48 \text{ 이므로 } a = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3(x - 4)^2 \text{ 이므로, 구하는 값은 } f(7) = 3(7 - 4)^2 = 27 \text{ 이다.}$$

20. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 선분의 외분점과 중점의 좌표를 구하고, 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제입니다.

[풀이]

두 점 $A(a, 8)$, $B(6, -4)$ 에 대하여 선분 AB 를 3:1 로 외분하는 점 P 의 좌표는

$$P\left(\frac{3 \cdot 6 - 1 \cdot a}{3 - 1}, \frac{3 \cdot (-4) - 1 \cdot 8}{3 - 1}\right) = \left(\frac{18 - a}{2}, -10\right) \text{ 이다.}$$

선분 OA 의 중점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{a}{2}, 4\right)$ 이다.

직선 PQ 는 삼각형 OAB 의 변 OA 위의 점 Q 를 지난다. 한편, 삼각형 OAB 와 삼각형 OQB 는 점 B 에서 밑변 OA 에 내린 높이 가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 점 Q 가 선분 OA 의 중점이므로 $\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{OA}$ 이고, 삼각형 OQB 의 넓이는 삼각형 OAB 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 직선 PQ 가 삼각형 OAB 의 넓이를 이등분하려면 직선 PQ 가 반드시 점 B 를 지나야 한다.

세 점 P , Q , B 가 한 직선 위에 있으므로, 직선 QB 와 직선 PB 의 기울기는 같다.

$$(\text{직선 QB 의 기울기}) = \frac{4 - (-4)}{\frac{a}{2} - 6} = \frac{8}{\frac{a}{2} - 6} = \frac{16}{a - 12}$$

$$(\text{직선 PB 의 기울기}) = \frac{-10 - (-4)}{\frac{18 - a}{2} - 6} = \frac{-6}{\frac{18 - a}{2} - 6} = \frac{-12}{6 - a}$$

$$\text{두 기울기가 같으므로 } \frac{16}{a - 12} = \frac{-12}{6 - a} \text{ 이다.}$$

$$16(6 - a) = -12(a - 12)$$

$$4(6 - a) = -3(a - 12)$$

$$24 - 4a = -3a + 36$$

$$a = -12$$

. 이 값은 음수라는 조건을 만족한다.

그러므로 구하는 a 의 값은 -12 이다.

21. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 주어진 방정식의 해의 집합과 그 조건을 만족하는 변수의 개수를 통해 두 이차함수의 관계를 추론하고, 함숫값의 합을 계산하는 문제입니다.

[풀이]

핵심 조건 정리 $\rightarrow$ 방정식 $(x - f(k))(x - g(k)) = 0$ 의 해의 집합이 $\{-2, 6\}$ 이므로, $\{f(k), g(k)\} = \{-2, 6\}$ 입니다. 이는 다음 두 경우 중 하나가 성립함을 의미합니다.

(i) $f(k) = -2$ 이고 $g(k) = 6$

(ii) $f(k) = 6$ 이고 $g(k) = -2$

이 조건을 만족하는 실수 k 의 개수가 3개라는 사실은, 위 두 경우 중 한 경우의 해가 1개, 다른 경우의 해가 2개임을 의미합니다. $f(x)$ 는 위로 볼록, $g(x)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이므로, $f(x)$ 의 최댓값이 6이거나 $g(x)$ 의 최솟값이 -2 일 때 해가 1개인 경우가 생깁니다.

필요한 식 전개 $\rightarrow$ 두 이차함수 $f(x), g(x)$ 의 대칭축이 $x = p$ 로 일치해야 합니다. 이때 $f(x)$ 의 꼭짓점이 $(p, 6)$ 이고 $g(x)$ 의 꼭짓점이 $(p, -2)$ 가 되어야 조건을 만족시킬 수 있습니다. 따라서 $f(x) = -(x - p)^2 + 6$ 이고 $g(x) = (x - p)^2 - 2$ 입니다. 이 경우 $f(k) = 6$ 과 $g(k) = -2$ 의 공통 해는 $k = p$ 하나뿐입니다. (경우 (ii))

$f(k) = -2$ 와 $g(k) = 6$ 의 공통 해를 찾으려면, $-(k - p)^2 + 6 = -2$ Wimplies $(k - p)^2 = 8$ 및 $(k - p)^2 - 2 = 6$ Wimplies $(k - p)^2 = 8$ 에서 $k = p \pm 2\sqrt{2}$ 로 2개의 해를 얻습니다. (경우 (i))

따라서 조건을 만족시키는 세 실수 k 는 $p, p + 2\sqrt{2}, p - 2\sqrt{2}$ 입니다. 이들의 합이 9이므로 $p + (p + 2\sqrt{2}) + (p - 2\sqrt{2}) = 3p = 9$, 즉 $p = 3$ 입니다. 그러므로 $f(x) = -(x - 3)^2 + 6$ 이고 $g(x) = (x - 3)^2 - 2$ 입니다.

정답 도출 $\rightarrow$ 문제에서 요구하는 값은 $f(1) + g(1)$ 입니다. $f(x) + g(x) = -(x - 3)^2 + 6 + ((x - 3)^2 - 2) = 4$ 이므로, x 의 값에 관계없이 항상 4입니다. 따라서 $f(1) + g(1) = 4$ 입니다.

22. 정답 및 풀이

정답: 231

[출제의도] 순열의 뜻을 이용하여 미지수의 값을 구하고, 이를 활용하여 순열과 조합의 값을 계산할 수 있다.

[풀이]

주어진 조건 ${}_nP_2 = 42$ 에서 순열의 정의에 따라 $n(n - 1) = 42$ 입니다. n 은 $n \geq 2$ 인 자연수이므로, $7 \times 6 = 42$ 에서 $n = 7$ 임을 알 수 있습니다.

따라서 구하고자 하는 값은 ${}_7P_3 + {}_7C_2$ 입니다.

${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ 이고, ${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ 입니다.

그러므로 ${}_7P_3 + {}_7C_2 = 210 + 21 = 231$ 입니다.

23. 정답 및 풀이

정답: 17

[출제의도] 이차부등식과 절댓값을 포함한 부등식으로 이루어진 연립부등식의 해를 구하고, 조건을 만족시키는 정수의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

첫 번째 부등식 $x^2 - 6x - 16 < 0$ 을 풀면 $(x + 2)(x - 8) < 0$ 이므로 해는 $-2 < x < 8$ 이다.

두 번째 부등식 $|x - 2| \geq 3$ 을 풀면 $x - 2 \geq 3$ 또는 $x - 2 \leq -3$ 이므로 해는 $x \geq 5$ 또는 $x \leq -1$ 이다.

두 부등식의 해의 공통 범위를 구하면 $-2 < x \leq -1$ 또는 $5 \leq x < 8$ 이다.

이 범위를 만족시키는 정수 x 는 $-1, 5, 6, 7$ 이다.

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 $-1 + 5 + 6 + 7 = 17$ 이다.

24. 정답 및 풀이

정답: 9

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 정수의 개수를 구할 수 있는가를 평가한다.

[풀이] 주어진 이차방정식이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지려면 두 근의 곱이 음수여야 한다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 곱은 $k^2 - 19$ 이다.

따라서 $k^2 - 19 < 0$ 이어야 하고, 이 부등식을 풀면 $k^2 < 19$ 이므로 $-\sqrt{19} < k < \sqrt{19}$ 이다.

$4^2 = 16, 5^2 = 25$ 이므로 $4 < \sqrt{19} < 5$ 이다. 따라서 부등식을 만족시키는 정수 k 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 이다.

이 모든 정수 k 의 개수는 9이다.

25. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 나머지정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 이차다항식의 함숫값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

문제의 조건에 따라 $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이고, 나머지정리에 의해 $P(1) = 2$ 이고 $P(2) = P(3)$ 이다. 구하고자 하는 값은 $P(x)$ 를 $x + 1$ 로 나눈 나머지만 $P(-1)$ 이다.

$P(x) = x^2 + ax + b$ 로 놓으면, $P(1) = 1 + a + b = 2$ 에서 $a + b = 1$ 이다. 또한, $P(2) = P(3)$ 조건으로부터 $4 + 2a + b = 9 + 3a + b$ 이므로 $a = -5$ 이다. $a = -5$ 를 $a + b = 1$ 에 대입하면 $b = 6$ 을 얻는다.

따라서 $P(x) = x^2 - 5x + 6$ 이고, 구하는 나머지는 $P(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$ 이다.

26. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 평행한 두 직선의 방정식을 설정하고, 삼각형의 무게중심 좌표를 이용하여 미지수를 구한 후 두 직선 사이의 거리를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[풀이]

직선 $l_1: x + 2y - 4 = 0$ 의 x 절편은 4, y 절편은 2 이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ 이다. 직선 l_2 는 l_1 에 평행하므로 방정식을 $x + 2y + k = 0$ (k 는 상수)로 놓을 수 있다. l_2 의 x 절편은 $y = 0$ 일 때 $x = -k$ 이므로 점 C의 좌표는 $C(-k, 0)$ 이다. 문제의 조건에서 x 절편이 음수이므로 $-k < 0$, 즉 $k > 0$ 이다.

삼각형 ABC의 무게중심 G 의 좌표는 $(\frac{4+0-k}{3}, \frac{0+2+0}{3}) = (\frac{4-k}{3}, \frac{2}{3})$ 이다. 무게중심 G 가 직선 $x = -\frac{2}{3}$ 위에 있으므로, G 의 x 좌표는 $-\frac{2}{3}$ 이다. 따라서 $\frac{4-k}{3} = -\frac{2}{3}$ 에서 $4-k = -2$, $k = 6$ 이다. 이는 $k > 0$ 조건을 만족시키므로 직선 l_2 의 방정식은 $x + 2y + 6 = 0$ 이다.

두 직선 $l_1: x + 2y - 4 = 0$ 과 $l_2: x + 2y + 6 = 0$ 사이의 거리 d 는 평행한 두 직선 사이의 거리 공식을 이용하면 $d = \frac{|6 - (-4)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ 이다. 따라서 $d^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ 이므로, 구하는 값은 $5d^2 = 5 \times 20 = 100$ 이다.

27. 정답 및 풀이

정답: 20

[출제의도] 다항식의 나눗셈에 대한 항등식과 나머지의 차수 조건을 이용하여 다항식을 추론하고, 나머지정리를 활용하여 미정계수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

주어진 나눗셈 관계식은 $(x^2 + 1)P(x) = (P(x) + x)Q(x) + P(x) - x^3$ 이다.

이때 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 작아야 하므로, $\deg(P(x) - x^3) < \deg(P(x) + x)$ 이다.

$P(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 할 때, 만약 $n > 3$ 이거나 $n < 3$ 이면 위 차수 관계가 성립하지 않는다. 따라서 $P(x)$ 는 삼차식이어야 하고, 최고차항의 계수 a 는 $a - 1 = 0$, 즉 $a = 1$ 이어야 한다. $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 로 놓을 수 있다.

주어진 항등식을 정리하면 $x^2P(x) + x^3 = (P(x) + x)Q(x)$ 이므로, $x^2(P(x) + x) = (P(x) + x)Q(x)$ 이다. $P(x) + x$ 는 0이 아니므로 양변을

소거하면 $Q(x) = x^2$ 임을 알 수 있다.

$P(x)$ 를 $Q(x) = x^2$ 으로 나눈 나머지가 $4x - 1$ 이라는 조건에서, $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = (x + b)x^2 + (cx + d)$ 이므로 나머지는 $cx + d$ 이다. 따라서 $cx + d = 4x - 1$ 이므로 $c = 4, d = -1$ 이다.

즉, $P(x) = x^3 + bx^2 + 4x - 1$ 이다.

$P(-1) = 10$ 이므로 $P(-1) = (-1)^3 + b(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -1 + b - 4 - 1 = b - 6 = 10$ 에서 $b = 16$ 이다.

따라서 $P(x) = x^3 + 16x^2 + 4x - 1$ 이다.

구하는 값은 $P(1) = 1 + 16 + 4 - 1 = 20$ 이다.

28. 정답 및 풀이

정답: 35

[출제의도] 이차함수의 꼭짓점을 지나는 직선과의 교점을 이용하여 정의된 삼각형 넓이가 최대가 되는 상황을 이차함수 표준형을 이용하여 해결할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

이차함수 $f(x) = -x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9$ 이므로 꼭짓점 A의 좌표는 $(3, 9)$ 이다. 점 A를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = m(x - 3) + 9$ 이다.

직선과 이차함수 그래프의 교점의 x 좌표는 방정식 $-x^2 + 6x = m(x - 3) + 9$, 즉 $x^2 + (m - 6)x + (9 - 3m) = 0$ 의 두 실근이다. 한 근은 점 A의 x 좌표인 3 이고, 점 P의 x 좌표를 x_P 라 하면 근과 계수의 관계에 의해 $3 + x_P = -(m - 6) = 6 - m$ 이므로 $x_P = 3 - m$ 이다.

점 P의 y 좌표는 직선의 방정식에 대입하여 $y_P = m((3 - m) - 3) + 9 = -m^2 + 9$ 이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(3 - m, 9 - m^2)$ 이다.

원점 O, 점 A $(3, 9)$, 점 P $(3 - m, 9 - m^2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAP의 넓이 $S(m)$ 은

$S(m) = \frac{1}{2}|x_{AY_P} - x_{PY_A}| = \frac{1}{2}|3(9 - m^2) - (3 - m)9| = \frac{1}{2}|27 - 3m^2 - 27 + 9m| = \frac{1}{2}|-3m^2 + 9m|$ 이다.

$0 < m < 3$ 범위에서 $m > 0$ 이고 $3 - m > 0$ 이므로 $-3m^2 + 9m = 3m(3 - m) > 0$ 이다.

따라서 $S(m) = \frac{3}{2}(-m^2 + 3m) = -\frac{3}{2}(m^2 - 3m) = -\frac{3}{2}(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{8}$ 이다.

$S(m)$ 은 $m = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{27}{8}$ 을 가진다. 따라서 $\frac{q}{p} = \frac{27}{8}$ 이므로 $p = 8, q = 27$ 이다. p 와 q 는 서로소인 자연수이다. 그러므로 $p + q = 8 + 27 = 35$ 이다.

29. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차함수의 근과 계수의 관계 및 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소를 이용하여 함수를 결정할 수 있는지를 평가한다.

[풀이]

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하고, 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하자. 조건 (가)에서 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4b = 16$ 이다. 즉, $a^2 - 4b = 16$ 이다. $f(x)$ 의 대칭축은 $x = -\frac{a}{2}$ 이다.

조건 (나)에서 구간 $[2, 5]$ 의 최솟값은 -3 이다. 대칭축 $-a/2$ 가 구간 $[2, 5]$ 에 포함되면 최솟값은 꼭짓점의 y 좌표인 $-a^2/4 + b$ 가 된다. 이 경우 $a^2 - 4b = 12$ 가 되어 $a^2 - 4b = 16$ 과 모순이다. 따라서 대칭축은 구간 $[2, 5]$ 외부에 있다.

(i) $-a/2 < 2$ (즉, $a > -4$) 일 때: 최솟값은 $f(2) = 4 + 2a + b = -3$ 이므로 $2a + b = -7$ 이다.

(ii) $-a/2 > 5$ (즉, $a < -10$) 일 때: 최솟값은 $f(5) = 25 + 5a + b = -3$ 이므로 $5a + b = -28$ 이다.

조건 (다)에서 구간 $[2, 6]$ 의 최댓값은 21 이다. (i)의 경우($a > -4$), 대칭축이 구간 $[2, 6]$ 의 왼쪽에 있으므로 최댓값은

$f(6) = 36 + 6a + b = 21$, 즉 $6a + b = -15$ 이다. 이를 $2a + b = -7$ 과 연립하여 풀면 $a = -2, b = -3$ 을 얻는다. 이는 $a > -4$ 와 $a^2 - 4b = 16$ 을 모두 만족시킨다. (ii)의 경우($a < -10$), 대칭축이 구간 $[2, 6]$ 의 오른쪽에 있으므로 최댓값은 $f(2) = 4 + 2a + b = 21$, 즉 $2a + b = 17$ 이다. 이를 $5a + b = -28$ 과 연립하여 풀면 $a = -15, b = 47$ 을 얻지만, $a^2 - 4b = 37 \neq 16$ 이므로 모순이다.

따라서 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 이고, 구하는 값은 $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$ 이다.

30. 정답 및 풀이

정답: 3

[출제의도] 이차함수의 그래프와 원의 평행이동 및 접선 조건을 해석하고, 주어진 조건을 만족하는 이차함수의 식을 구하여 함숫값을 계산할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[풀이]

중심이 $(t, f(t))$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $-m$ 만큼 평행이동하면 중심은 $(t+m, f(t)-m)$ 이 된다. 이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 중심의 좌표는 $(\pm 2, \pm 2)$ 이다. 따라서 $|t+m|=2$ 이고 $|f(t)-m|=2$ 인 실수 m 이 존재해야 한다. m 을 소거하여 정리하면, $f(t)+t=\pm 4$ 또는 $f(t)+t=0$ 을 만족해야 한다. 즉, $y=f(x)$ 의 그래프는 세 직선 $y=-x, y=-x+4, y=-x-4$ 와 5개의 서로 다른 점에서 만난다.

$h(x)=f(x)+x$ 라 하면, 이차함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 세 직선 $y=0, y=4, y=-4$ 의 교점의 x 좌표가 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 이다. $y=h(x)$ 의 대칭축을 $x=p$ 라 하면, 5개의 교점을 가지므로 $y=h(x)$ 는 $y=4$ 또는 $y=-4$ 에 접하고, 교점의 x 좌표는 대칭축에 대해 대칭이다. 따라서 $x_3=p$ 이고 $x_1+x_5=2p, x_2+x_4=2p$ 이다. 주어진 조건 $x_2+x_3+x_4+x_5=24$ 에서 $(x_2+x_4)+x_3+x_5=2p+p+x_5=3p+x_5=24$ 이다. 또한 $x_1=1$ 이므로 $1+x_5=2p$ 에서 $x_5=2p-1$ 이다. 두 식을 연립하면 $3p+(2p-1)=24$ 에서 $5p=25$, 즉 $p=5$ 이다. 따라서 $x_3=5$ 이고 $x_5=2(5)-1=9$ 이다.

(i) $h(x)=a(x-5)^2-4$ (아래로 볼록)일 경우: $y=h(x)$ 와 $y=4$ 의 교점의 x 좌표가 x_1, x_5 이다. $h(1)=4$ 이므로 $a(1-5)^2-4=4$ 에서 $16a=8$, $a=\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $f(x)=h(x)-x=\frac{1}{2}(x-5)^2-4-x=\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{17}{2}$ 이다. 방정식 $f(x)=0$ 즉 $x^2-12x+17=0$ 의 근은 $x=6\pm\sqrt{19}$ 이고, $1<6-\sqrt{19}<9$ 이므로 $[x_1, x_5]$ 에서 $|f(x)|$ 의 최솟값이 0이라는 조건을 만족시킨다.

(ii) $h(x)=a(x-5)^2+4$ (위로 볼록)일 경우: $y=h(x)$ 와 $y=-4$ 의 교점의 x 좌표가 x_1, x_5 이다. $h(1)=-4$ 이므로 $a(1-5)^2+4=-4$ 에서 $16a=-8$, $a=-\frac{1}{2}$ 이다. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{17}{2}$ 이고, $f(x)=0$ 의 판별식

$D=4^2-4(-\frac{1}{2})(-\frac{17}{2})<0$ 이므로 실근이 존재하지 않아 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{17}{2}$ 이다. 구하는 값은 $f(11)=\frac{1}{2}(11^2)-6(11)+\frac{17}{2}=\frac{121-132+17}{2}=\frac{6}{2}=3$ 이다.