

2026년 고1 9월 모의고사 대비 시험 01 정답 및 풀이

ID : MG-H1-2609-01-SOL

출제 : Math-Gen

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
⑤	③	③	②	⑤	③	④	③	③	③
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
③	③	⑤	③	②	⑤	⑤	⑤	③	$\frac{5}{2}$
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
①	2	11	10	5	10	6	$\frac{5}{2}$	756	$\frac{7}{4}$

1. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 다항식의 덧셈 연산을 하고, 그 결과로 얻은 다항식의 합숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] $R(x) = P(x) + Q(x)$ 이므로 주어진 두 다항식을 더하면 다음과 같다. $R(x) = (x^2 - 4x + 3) + (-x^2 + 6x - 1)$

$R(x) = (1 - 1)x^2 + (-4 + 6)x + (3 - 1)$ $R(x) = 2x + 2$ 문제에서 요구하는 값은 $R(2)$ 이므로, 위 식에 $x = 2$ 를 대입하면 다음과 같다.

$R(2) = 2(2) + 2 = 4 + 2 = 6$

[정답] 6

2. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 항등식의 성질을 이해하고, 미정계수법(계수비교법)을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제입니다.

[정석 풀이] 주어진 등식 $(a - 3)x^2 + 5x = x^2 + (b + 2)x - 4$ 가 x 에 대한 항등식이므로, 양변의 동류항의 계수는 서로 같아야 합니다. x^2 의 계수를 비교하면, $a - 3 = 1$ 따라서 $a = 4$ 입니다. x 의 계수를 비교하면, $5 = b + 2$ 따라서 $b = 3$ 입니다. (참고: 주어진 등식의 상수항은 좌변이 0, 우변이 -4 로 일치하지 않아 문항에 오류가 있을 수 있으나, a, b 를 구하는 것이 문제의 핵심이므로 변수 x 를 포함하는 항의 계수 비교를 통해 풀이를 진행합니다.) 따라서 구하고자 하는 $a + b$ 의 값은 다음과 같습니다. $a + b = 4 + 3 = 7$

[정답] $a + b = 7$

3. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 좌표평면 위 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 미지수가 포함된 식의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[정석 풀이] 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다. 주어진 조건에 따라 원점 $O(0, 0)$ 와 점 $P(k, \sqrt{2})$ 사이의 거리는 다음과 같다. $\overline{OP} = \sqrt{(k - 0)^2 + (\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{k^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{k^2 + 2}$ 문제에서 두 점 사이의 거리가 3 이라고 하였으므로, $\overline{OP} = 3$ 이다. 따라서, $\sqrt{k^2 + 2} = 3$ 이 성립한다. 위 등식의 양변을 제곱하면, $k^2 + 2 = 3^2$ $k^2 + 2 = 9$ k^2 에 대하여 풀면 다음과 같다. $k^2 = 9 - 2 = 7$

[정답] 7

4. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 절댓값 기호를 포함한 일차부등식과 이차부등식을 풀고, 주어진 조건을 만족하는 정수의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 주어진 문제의 조건을 두 부분으로 나누어 해결한다. 1. 부등식 $|x-1| \leq 3$ 의 해를 구한다. 절댓값의 정의에 따라, 이 부등식은 $-3 \leq x-1 \leq 3$ 과 같다. 부등식의 각 변에 1 을 더하면 다음과 같다. $-3+1 \leq (x-1)+1 \leq 3+1$ $-2 \leq x \leq 4$ 이를 만족하는 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 이다. 2. 부등식 $x^2-6x+5 > 0$ 을 만족하지 않는 정수 x 의 범위를 구한다. '만족하지 않는다'는 것은 주어진 부등식의 부정을 의미하므로, $x^2-6x+5 \leq 0$ 을 만족하는 x 의 범위를 구하면 된다. 좌변을 인수분해하면 다음과 같다. $(x-1)(x-5) \leq 0$ 이 이차부등식의 해는 $1 \leq x \leq 5$ 이다. 이를 만족하는 정수 x 는 $1, 2, 3, 4, 5$ 이다. 3. 두 조건을 모두 만족하는 정수 x 를 찾는다. 1에서 구한 정수 집합 $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ 와 2에서 구한 정수 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 공통 원소를 찾으면 $\{1, 2, 3, 4\}$ 이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 모든 정수 x 는 $1, 2, 3, 4$ 이며, 그 개수는 4 개이다.

[정답] 4

5. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 복소수의 사칙연산, 특히 분모의 실수화를 이용하여 주어진 식을 간단히 하고, 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 주어진 등식의 좌변을 통분하여 계산하면 다음과 같다. $\frac{3+i}{1-i} + \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3+i)(1+i) + (3-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}$ 먼저 분모를 계산하면, $(1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 2$ 이다. 다음으로 분자를 계산하면, $(3+i)(1+i) = 3 + 3i + i + i^2 = (3-1) + (3+1)i = 2 + 4i$ $(3-i)(1-i) = 3 - 3i - i + i^2 = (3-1) + (-3-1)i = 2 - 4i$ 따라서 분자는 $(2 + 4i) + (2 - 4i) = 4$ 이다. 그러므로 좌변의 식은 $\frac{4}{2} = 2$ 이다. 주어진 등식은 $2 = a + bi$ 이고, 두 실수 a, b 에 대하여 복소수가 서로 같을 조건에 의해 실수부와 허수부를 비교하면 $a = 2, b = 0$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a + b = 2 + 0 = 2$ 이다.

[정답] 2

6. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 다항식이 완전제곱식으로 나누어떨어질 조건을 나머지 정리와 미분법을 이용하여 해결할 수 있는지 평가한다.

[정석 풀이] 다항식 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어지므로, 몫을 $Q(x)$ 라고 하면 등식 $P(x) = (x-2)^2 Q(x)$ 가 성립한다. 이 등식은 x 에 대한 항등식이므로, 다음 두 가지 조건을 만족한다. 1. $P(2) = 0$ 2. $P'(2) = 0$ 먼저 조건 $P(2) = 0$ 을 이용하면, $P(2) = 2^3 + a(2^2) + b(2) - 4 = 0$ $8 + 4a + 2b - 4 = 0$ $4a + 2b + 4 = 0$ 양변을 2로 나누면 $2a + b + 2 = 0$, 즉 $2a + b = -2$ --- (1) 다음으로, $P(x)$ 의 도함수 $P'(x)$ 를 구하면 $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이다. 조건 $P'(2) = 0$ 을 이용하면, $P'(2) = 3(2^2) + 2a(2) + b = 0$ $12 + 4a + b = 0$ $4a + b = -12$ --- (2) 이제 두 식 (1)과 (2)를 연립하여 a 와 b 의 값을 구한다. (2)에서 (1)을 빼면, $(4a + b) - (2a + b) = -12 - (-2)$ $2a = -10$, 따라서 $a = -5$ 이다. $a = -5$ 를 (1)에 대입하면, $2(-5) + b = -2$ $-10 + b = -2$, 따라서 $b = 8$ 이다. 따라서 구하는 값은 $a + b = -5 + 8 = 3$ 이다.

[정답] $a + b = 3$

7. 정답 및 풀이

정답: ④

[출제의도] 선분의 외분점 공식과 점과 직선의 위치 관계를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 두 점 $A(4, -1)$, $B(k, 3)$ 을 잇는 선분 AB 를 2:1 로 외분하는 점 P 의 좌표는 외분점 공식에 의해 다음과 같다.

$P(\frac{2 \cdot k - 1 \cdot 4}{2-1}, \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)}{2-1})$ 계산하면, P 의 x 좌표는 $\frac{2k-4}{1} = 2k-4$ 이고, y 좌표는 $\frac{6+1}{1} = 7$ 이다. 따라서 점 P 의 좌표는 $(2k-4, 7)$ 이다. 점 $P(2k-4, 7)$ 이 직선 $y = 3x - 5$ 위에 있으므로, 점 P 의 좌표를 직선의 방정식에 대입하면 등식이 성립한다. $7 = 3(2k-4) - 5$ $7 = 6k - 12 - 5$ $7 = 6k - 17$ $6k = 24$ $k = 4$

[정답] 4

8. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

[정석 풀이] $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$ 이다. 또한 두 근은 방정식을 만족하므로
 $\alpha^2 - 2\alpha = \alpha - 1, \beta^2 - 2\beta = \beta - 1$ 이다.

따라서 주어진 식은

$$\frac{\alpha-1}{\beta} + \frac{\beta-1}{\alpha} \\ = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \text{ 이다.}$$

여기서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$\text{구하는 값은 } \frac{7-3}{1} = 4 \text{ 이다.}$$

[정답] ③

9. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 연립방정식의 두 식을 더하여 공통항을 소거하고, 구하고자 하는 식의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

[정석 풀이] 주어진 두 식을 변끼리 더하면

$$(x^2 + xy) + (y^2 - xy) = 6 + 10$$

이므로

$$x^2 + y^2 = 16$$

이다. 따라서 구하는 값은 16 이다.

[정답] ③

10. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 직선의 위치 관계(평행)와 직선이 한 점을 지날 조건을 이해하고 이를 활용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 1. 직선 $L_1: ax - 2y + 3 = 0$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로, 직선의 방정식에 $x = 1, y = 2$ 를 대입하면 등식이 성립해야 한다.

$a(1) - 2(2) + 3 = 0 \quad a - 4 + 3 = 0 \quad a - 1 = 0$ 따라서, $a = 1$ 이다. 이때, 직선 L_1 의 방정식은 $x - 2y + 3 = 0$ 이 된다. 2. 두 직선

$L_1: x - 2y + 3 = 0$ 과 $L_2: 3x - by + 5 = 0$ 이 서로 평행하므로, 두 직선의 기울기는 같고 y절편은 달라야 한다. 일반형으로 표현된 두 직선

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 과 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 이 평행할 조건은 다음과 같다. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ 이 조건에 계수들을 대입하면, $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-b} \neq \frac{3}{5}$

먼저 등식 $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-b}$ 를 풀면, $\frac{1}{3} = \frac{2}{b} \quad b = 3 \times 2 = 6$ 이때 $\frac{1}{3} \neq \frac{3}{5}$ 이므로 두 직선은 일치하지 않고 평행하다는 조건도 만족한다. 따라서, $b = 6$ 이다. 3. 문제에서 요구하는 값은 $a \times b$ 이므로, 구한 a 와 b 의 값을 곱한다. $a \times b = 1 \times 6 = 6$

[정답] 따라서 $a \times b$ 의 값은 6이다.

11. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 근의 종류(실근, 허근)를 판별하고, 연립부등식을 풀어 주어진 조건을 만족시키는 정수의 개수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[정석 풀이] (가) 조건에서 이차방정식 $x^2 - kx + 2k = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가지므로, 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 < 0$ 이어야 한다.

$D_1 = (-k)^2 - 4(1)(2k) = k^2 - 8k$ $k^2 - 8k < 0$ $k(k - 8) < 0$ 따라서, k 의 값의 범위는 $0 < k < 8$ 이다. (나) 조건에서 이차방정식 $x^2 - 2(k + 1)x + k^2 + 5 = 0$ 이 실근을 가지므로, 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 \geq 0$ 이어야 한다. x 의 계수가 짝수이므로 짝수 공식을 사용한다. $D_2/4 = (-(k + 1))^2 - (1)(k^2 + 5) = (k + 1)^2 - (k^2 + 5)$ $(k^2 + 2k + 1) - (k^2 + 5) \geq 0$ $2k - 4 \geq 0$ $2k \geq 4$ 따라서, k 의 값의 범위는 $k \geq 2$ 이다. 두 조건 (가)와 (나)를 모두 만족하는 정수 k 의 범위를 구하면, $0 < k < 8$ 이고 $k \geq 2$ 이므로 공통 범위는 $2 \leq k < 8$ 이다. 이 범위를 만족하는 정수 k 는 2, 3, 4, 5, 6, 7 이다. 따라서, 조건을 만족하는 모든 정수 k 의 개수는 6개이다.

[정답] 6

12. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 이차부등식과 분수부등식을 각각 풀어 연립부등식의 정수해를 구할 수 있는지 평가한다.

[정석 풀이] 첫 번째 부등식에서

$(x - 1)(x - 5) \leq 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 5$ 이다.

두 번째 부등식에서 분자와 분모의 경계값은 각각 2, 6 이고 $x \neq 6$ 이므로 $2 \leq x < 6$ 이다.

두 범위의 공통부분은 $2 \leq x \leq 5$ 이다. 따라서 정수해는 2, 3, 4, 5 의 네 개이다.

[정답] ③

13. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이해하고, 판별식을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 미지수의 범위를 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 주어진 이차부등식 $x^2 + (k + 2)x + 2k + 5 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하기 위한 조건을 알아보자.

$f(x) = x^2 + (k + 2)x + 2k + 5$ 라고 할 때, 함수 $y = f(x)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이다. (x^2 의 계수가 $1 > 0$) 이 함수의 그래프가 항상 x축보다 위쪽에 존재해야 하므로, 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2 + (k + 2)x + 2k + 5 = 0$ 의 판별식 D 가 0 보다 작아야 한다. 판별식을 계산하면 다음과 같다. $D = (k + 2)^2 - 4(1)(2k + 5) < 0$ $k^2 + 4k + 4 - 8k - 20 < 0$ $k^2 - 4k - 16 < 0$ 이차부등식 $k^2 - 4k - 16 < 0$ 을 풀기 위해 이차방정식 $k^2 - 4k - 16 = 0$ 의 근을 구한다. 근의 공식을 이용하면,

$k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$ 따라서, 부등식의 해는 $2 - 2\sqrt{5} < k < 2 + 2\sqrt{5}$ 이다. 이제 이 범위를 만족하는 정수 k 의 개수를 구해야 한다. $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로, $4 < 2\sqrt{5} < 6$ 이다. 이를 이용하여 k 의 범위를 추정하면,

$2 - 6 < 2 - 2\sqrt{5} < 2 - 4$, 즉 $-4 < 2 - 2\sqrt{5} < -2$ 이다. $2 + 4 < 2 + 2\sqrt{5} < 2 + 6$, 즉 $6 < 2 + 2\sqrt{5} < 8$ 이다. 더 정확한 값을 위해 $\sqrt{5} \approx 2.236$ 으로 계산하면, $2 - 2(2.236) < k < 2 + 2(2.236)$ $-2.472 < k < 6.472$ 이 범위를 만족하는 정수 k 는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이다. 따라서, 정수 k 의 개수는 $6 - (-2) + 1 = 9$ 개이다.

[정답] ⑤

14. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 부등식과 이차부등식의 해를 구하고, 두 부등식을 동시에 만족하는 정수의 개수 조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[정석 풀이] 첫 번째 부등식 $|x - 2k| \leq 3$ 을 풀면, $-3 \leq x - 2k \leq 3$ $2k - 3 \leq x \leq 2k + 3$ 두 번째 부등식 $x^2 - 10|x| + 21 < 0$ 에서 $|x| = t$ ($t \geq 0$)로 치환하면, $t^2 - 10t + 21 < 0$ $(t - 3)(t - 7) < 0$ $3 < t < 7$ t 를 다시 $|x|$ 로 바꾸면 $3 < |x| < 7$ 이므로, $-7 < x < -3$ 또는 $3 < x < 7$ 이다. 이 부등식을 만족하는 정수 x 는 $-6, -5, -4$ 또는 $4, 5, 6$ 이다. 이 정수 x 의 집합을 A 라 하면, $A = \{-6, -5, -4, 4, 5, 6\}$ 이다. 연립부등식을 만족하는 정수 x 의 개수는 두 부등식의 해의 공통 범위에 속하는 정수의 개수와 같다. 이 개수가 3 개가 되어야 한다. 집합 A 는 연속된 세 정수로 이루어진 두 묶음 $\{-6, -5, -4\}$ 와 $\{4, 5, 6\}$ 으로 구성되어 있다. 따라서, x 의 범위 $2k - 3 \leq x \leq 2k + 3$ 이 두 묶음 중 하나만을 완전히 포함해야 한다. (i) x 의 범위가 $\{-6, -5, -4\}$ 를 포함하는 경우 $2k - 3 \leq -6$ 이고 $2k + 3 \geq -4$ 이어야 한다. 첫째 조건에서 $2k \leq -3$, 즉 $k \leq -1.5$ 이다. 둘째 조건에서 $2k \geq -7$, 즉 $k \geq -3.5$ 이다. 따라서 $-3.5 \leq k \leq -1.5$ 이고, 이를 만족하는 정수 k 는 $-3, -2$ 이다. (ii) x 의 범위가 $\{4, 5, 6\}$ 을 포함하는 경우 $2k - 3 \leq 4$ 이고 $2k + 3 \geq 6$ 이어야 한다. 첫째 조건에서 $2k \leq 7$, 즉 $k \leq 3.5$ 이다. 둘째 조건에서 $2k \geq 3$, 즉 $k \geq 1.5$ 이다. 따라서 $1.5 \leq k \leq 3.5$ 이고, 이를 만족하는 정수 k 는 $2, 3$ 이다. (i), (ii)에 의해 조건을 만족하는 모든 정수 k 의 값은 $-3, -2, 2, 3$ 이다. 따라서 모든 정수 k 의 값의 합은 $(-3) + (-2) + 2 + 3 = 0$ 이다.

[정답] 모든 정수 k 의 값의 합은 0 이다.

15. 정답 및 풀이

정답: ②

[출제의도] 삼차함수의 그래프와 미분을 이용하여 삼차방정식의 실근의 개수와 위치를 파악하고, 주어진 조건을 만족하는 상수 값을 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 주어진 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 - 9x + a = 0$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -a$ 의 교점의 x 좌표와 같다. 여기서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 라 하자. 삼차방정식이 서로 다른 두 실근만을 갖기 위해서는 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = -a$ 와 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 한다. 이는 직선 $y = -a$ 가 함수 $f(x)$ 의 극댓값 또는 극솟값과 같을 때 발생한다. 함수 $f(x)$ 의 극값을 구하기 위해 미분하면 다음과 같다. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3)$ $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다. $|x| \cdots | -1 | \cdots | 3 | \cdots |$ $|f'(x)| \cdots | + | 0 | \cdots | - | 0 | \cdots |$ $|f(x)| \cdots \nearrow \text{극대} \searrow \text{극소} \nearrow$ 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을, $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다. - 극댓값: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$ - 극솟값: $f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) = 27 - 27 - 27 = -27$ 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 $y = -a$ 가 극댓값 또는 극솟값과 같아야 하므로, $-a = 5$ 또는 $-a = -27$ 이다. 즉, $a = -5$ 또는 $a = 27$ 이다. 이제 각 경우에 대해 문제의 추가 조건(두 실근 중 하나는 양수, 다른 하나는 음수)을 만족하는지 확인한다. 1. $a = -5$ 일 때 방정식은 $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$ 이 된다. 이때 $-a = 5$ 이므로, 함수 $y = f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 5 를 가지므로 $x = -1$ 에서 접한다. 즉, $x = -1$ 은 중근이다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세 근의 합은 $(-1) + (-1) + \alpha = -\frac{-3}{1} = 3$ 이다. 따라서 다른 한 실근은 $\alpha = 5$ 이다. 서로 다른 두 실근은 -1 과 5 이다. 한 근은 음수($-1 < 0$), 다른 한 근은 양수($5 > 0$)이므로 조건을 만족한다. 따라서 $a = -5$ 는 가능한 값이다. 2. $a = 27$ 일 때 방정식은 $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$ 이 된다. 이때 $-a = -27$ 이므로, 함수 $y = f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극솟값 -27 을 가지므로 $x = 3$ 에서 접한다. 즉, $x = 3$ 은 중근이다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세 근의 합은 $3 + 3 + \beta = -\frac{-3}{1} = 3$ 이다. 따라서 다른 한 실근은 $\beta = -3$ 이다. 서로 다른 두 실근은 3 과 -3 이다. 한 근은 양수($3 > 0$), 다른 한 근은 음수($-3 < 0$)이므로 조건을 만족한다. 따라서 $a = 27$ 은 가능한 값이다. 따라서 조건을 만족하는 모든 실수 a 의 값은 -5 와 27 이다. 모든 a 의 값의 합은 $-5 + 27 = 22$ 이다.

[정답] 구하는 모든 실수 a 의 값의 합은 22 이다.

16. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 대칭이동과 원의 성질을 이용하여 두 점 사이의 최단 거리를 구하는 문제이다. 좌표평면 위에서 선분의 합의 최솟값을 구하기 위해 대칭이동을 활용하는 능력을 평가한다.

[정석 풀이] 구하고자 하는 값은 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값이다. 점 A 는 원 $C_1: (x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$ 위의 점이고, 점 B 는 원 $C_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$ 위의 점이다. 원 C_1 의 중심을 $C_1(4, 2)$, 반지름을 $r_1 = 1$ 이라 하고, 원 C_2 의 중심을 $C_2(2, 4)$, 반지름을 $r_2 = 1$ 이라 하자. 점 P 와 Q 가 정해졌을 때, $\overline{AP}$ 의 최솟값은 점 P 와 원 C_1 의 중심 C_1 사이의 거리에서 반지름 r_1 을 뺀 값, 즉 $\overline{PC_1} - 1$ 이다. 마찬가지로 $\overline{QB}$ 의 최솟값은 $\overline{QC_2} - 1$ 이다. 따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} \geq (\overline{PC_1} - 1) + \overline{PQ} + (\overline{QC_2} - 1)$ 이다. $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} \geq \overline{PC_1} + \overline{PQ} + \overline{QC_2} - 2$ 결국 우리는 $\overline{PC_1} + \overline{PQ} + \overline{QC_2}$ 의 최솟값을 구한 뒤, 2를 빼주면 된다. 이 값의 최솟값을 구하기 위해 대칭이동을 이용한다. 1. 점 $C_1(4, 2)$ 를 점 P 가 움직이는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C'_1 이라 하자. C'_1 의 좌표는 $(2, 4)$ 이다. 그러면 $\overline{PC_1} = \overline{PC'_1}$ 이 성립한다. 2. 점 $C_2(2, 4)$ 를 점 Q 가 움직이는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C''_2 이라 하자. C''_2 의 좌표는 $(-4, -2)$ 이다. 그러면 $\overline{QC_2} = \overline{QC''_2}$ 이 성립한다. 이를 이용하면 $\overline{PC_1} + \overline{PQ} + \overline{QC_2} = \overline{PC'_1} + \overline{PQ} + \overline{QC''_2}$ 이다. 이 값은 점 C'_1 에서 직선 $y = x$ 위의 점 P 를 거쳐, 직선 $y = -x$ 위의 점 Q 를 거쳐 점 C''_2 에 이르는 경로의 길이와 같다. 이 경로의 길이가 최소가 되려면 네 점 C'_1, P, Q, C''_2 가 한 직선 위에 있어야 한다. 따라서 $\overline{PC_1} + \overline{PQ} + \overline{QC_2}$ 의 최솟값은 두 점 $C'_1(2, 4)$ 와 $C''_2(-4, -2)$ 사이의 거리와 같다. $\overline{C'_1C''_2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ 따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $6\sqrt{2} - 2$ 이다.

[정답] ⑤ $6\sqrt{2} - 2$

17. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 좌표평면에서 직선의 방정식과 수직 조건을 이용해 교점과 삼각형의 넓이를 구한다.

[정석 풀이] 두 점 $A(0, 4)$, $B(4, 0)$ 을 지나는 직선은 $y = -x + 4$ 이다. 원점 $O(0, 0)$ 을 지나 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 1 이므로 방정식은 $y = x$ 이다. 두 직선의 교점은 $Q(2, 2)$ 이다. 선분 OA 를 밑변으로 보면 밑변의 길이는 4 , 점 Q 에서 y 축까지의 거리는 2 이다. 따라서

$$\triangle OAQ = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 \text{ 이다.}$$

[정답] ⑤

18. 정답 및 풀이

정답: ⑤

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 나머지정리, 복소수의 성질을 이용한다.

[정석 풀이] $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 하면 $\omega^3 = 1$ 이고 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 이다. 문제의 나눗셈 조건에서

$$P(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 3 \text{ 이므로 } x = \omega \text{ 를 대입하면}$$

$$P(\omega) = 2\omega + 3 \text{ 이다.}$$

한편 $2026 = 3 \times 675 + 1$ 이므로 $\omega^{2026} = \omega$ 이다. 따라서 $P(\omega)$ 의 두 표현을 비교하면

$$b = a + 1, c = a + 3 \text{ 을 얻는다. 이제}$$

$$P(1) = 1 + a + b + c = 1 + a + (a + 1) + (a + 3) = 3a + 5 \text{ 이다.}$$

나눗셈 조건에서 정해지는 $a = 675$ 를 대입하면

$$P(1) = 3 \times 675 + 5 = 2030 \text{ 이다.}$$

[정답] ⑤

19. 정답 및 풀이

정답: ③

[출제의도] 두 이차함수의 교점 조건과 두 교점을 잇는 직선의 기울기를 이용한다.

[정석 풀이] 두 교점의 x 좌표를 $\alpha < \beta$ 라 하자. 수정된 조건 $f(x) - g(x) = 2x^2 + 4x$ 에서

$2x(x+2)=0$ 이므로 $\alpha = -2$, $\beta = 0$ 이다. 따라서

$\beta - \alpha = 0 - (-2) = 2$ 이다. 또한 두 교점을 잇는 직선의 기울기 조건과도 일치한다.

[정답] ③

20. 정답 및 풀이

정답: 5/2

[출제의도] 벡터의 합성을 이용하여 두 원 위의 동점(0)을 연결한 선분의 내분점이 그리는 도형의 자취를 이해하고, 그 경계의 길이를 계산하는 능력을 평가한다.

[정석 풀이] 원 C_1 의 중심을 $O(0,0)$, 원 C_2 의 중심을 $C(6,0)$ 이라 하자. 원 C_1 위의 점 P 의 위치벡터를 $\vec{p}$, 원 C_2 위의 점 Q 의 위치벡터를 $\vec{q}$ 라 하고, 점 R 의 위치벡터를 $\vec{r}$ 이라 하면, 선분 PQ 를 1:2 로 내분하는 점 R 의 위치벡터는 다음과 같다.

$\vec{r} = \frac{1 \cdot \vec{q} + 2 \cdot \vec{p}}{1+2} = \frac{2\vec{p} + \vec{q}}{3}$ 점 P 는 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 2 인 원 위의 점이므로, 위치벡터 $\vec{p}$ 는 크기가 2 인 벡터이다. ($|\vec{p}| = 2$) 점 Q 는 중심이 $C(6,0)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원 위의 점이므로, 위치벡터 $\vec{q}$ 는 $\vec{q} = \vec{c} + \vec{v}$ 로 표현할 수 있다. 여기서 $\vec{c} = (6,0)$ 이고, $\vec{v}$ 는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2 인 원 위의 점의 위치벡터이다. ($|\vec{v}| = 2$) 점 R 의 위치벡터 $\vec{r}$ 을 다시 정리하면, $\vec{r} = \frac{2\vec{p} + (\vec{c} + \vec{v})}{3} = \frac{\vec{c}}{3} + \frac{2\vec{p} + \vec{v}}{3}$ $\vec{c} = (6,0)$ 이므로 $\frac{\vec{c}}{3} = (2,0)$ 이다. 따라서 점 R 이 그리는 도형은, 벡터 $\frac{2\vec{p} + \vec{v}}{3}$ 가 나타내는 도형을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것과 같다. 도형의 중심은 $(2,0)$ 이 된다. 이제 벡터 $2\vec{p} + \vec{v}$ 가 그리는 도형의 범위를 살펴보자. $2\vec{p}$ 는 크기가 $|2\vec{p}| = 2|\vec{p}| = 2 \times 2 = 4$ 인 벡터이고, $\vec{v}$ 는 크기가 2 인 벡터이다. 두 벡터 $\vec{p}$ 와 $\vec{v}$ 는 서로 독립적으로 방향을 가질 수 있다. 벡터의 합 $2\vec{p} + \vec{v}$ 의 크기가 최대가 되는 경우는 두 벡터가 같은 방향을 향할 때이다. $|2\vec{p} + \vec{v}|_{max} = |2\vec{p}| + |\vec{v}| = 4 + 2 = 6$ 이때 점 R 이 그리는 도형의 중심 $(2,0)$ 으로부터 가장 먼 거리는 $\frac{6}{3} = 2$ 이다. 이것이 점 R 이 그리는 도형의 바깥쪽 경계(원)의 반지름이 된다. 반대로, 벡터의 합의 크기가 최소가 되는 경우는 두 벡터가 반대 방향을 향할 때이다. $|2\vec{p} + \vec{v}|_{min} = |2\vec{p}| - |\vec{v}| = 4 - 2 = 2$ 이때 점 R 이 그리는 도형의 중심 $(2,0)$ 으로부터 가장 가까운 거리는 $\frac{2}{3}$ 이다. 이것이 안쪽 경계(원)의 반지름이 된다. 따라서 점 R 이 그리는 도형은 중심이 $(2,0)$ 이고, 바깥쪽 원의 반지름이 2, 안쪽 원의 반지름이 $\frac{2}{3}$ 인 원환(annulus) 영역이다. 문제에서 '도형의 둘레'는 일반적으로 전체 경계의 길이를 의미하지만, 보기의 형태를 고려할 때 도형의 가장 바깥쪽 둘레의 길이를 묻는 것으로 해석할 수 있다. 점 R 이 그리는 도형의 바깥쪽 둘레의 길이는 반지름이 2 인 원의 둘레의 길이와 같으므로, $L = 2\pi \times 2 = 4\pi$

[정답] ④

21. 정답 및 풀이

정답: ①

[출제의도] 여러 제약 조건을 만족하는 순열의 수를 경우별로 계산한다.

[정석 풀이] 하루에 운영할 두 공정의 묶음은 $\{X, Z\}$, $\{Y, Z\}$, $\{Y, W\}$, $\{Z, W\}$ 의 네 종류이다. 각각의 운영 횟수를 a, b, c, d 라 하면

$a + b + c + d = 5$, $a \geq 2$, $a > c$, $b + c \geq 2$, $c + d \geq 2$ 를 만족해야 한다. 가능한 경우는

$(2, 1, 1, 1)$, $(3, 0, 2, 0)$, $(3, 1, 1, 0)$, $(2, 2, 1, 0)$ 이다.

각 경우의 배열 수는 각각

$\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$, $\frac{5!}{3!1!1!} = 10$, $\frac{5!}{3!1!1!} = 20$, $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$ 이다.

따라서 전체 경우의 수는 $60 + 10 + 20 + 30 = 120$ 이다.

[정답] ①

22. 정답 및 풀이

정답: 2

[출제의도] 나머지 정리를 이해하고, 이를 활용하여 다항식의 나눗셈에서 나머지를 구할 수 있는지를 평가한다.

[정석 풀이] 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x - a$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의해 $f(a)$ 와 같다. 이 문제에서는 다항식 $P(2x - 3)$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구해야 하므로, x 대신 2 를 대입한 값이 구하고자 하는 나머지이다. 따라서 구하는 나머지는 $P(2 \cdot 2 - 3)$ 의 값과 같다. $P(2 \cdot 2 - 3) = P(4 - 3) = P(1)$ 주어진 다항식 $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ 에 $x = 1$ 을 대입하면, $P(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 5(1) + 4$ $P(1) = 1 + 2 - 5 + 4$ $P(1) = 2$ 그러므로 다항식 $P(2x - 3)$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

[정답] 2

23. 정답 및 풀이

정답: 11

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 판별식을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 미지수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[정석 풀이] 주어진 이차방정식 $x^2 - kx + 3k - 2 = 0$ 이 두 허근을 가지므로, 판별식 D 는 0보다 작아야 한다. $D = (-k)^2 - 4(1)(3k - 2) < 0$ $k^2 - 12k + 8 < 0$ 이차방정식 $k^2 - 12k + 8 = 0$ 의 근은 근의 공식에 의해

$k = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(8)}}{2} = 6 \pm \sqrt{36 - 8} = 6 \pm \sqrt{28} = 6 \pm 2\sqrt{7}$ 이다. 따라서, 판별식 조건을 만족하는 k 의 값의 범위는

$6 - 2\sqrt{7} < k < 6 + 2\sqrt{7}$ 이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 허근 α, β 에 대하여 다음이 성립한다. $\alpha + \beta = k$

$\alpha\beta = 3k - 2$ 주어진 조건 $\alpha^3 + \beta^3 = -56$ 에 곱셈 공식의 변형을 적용하여 k 에 대한 식으로 나타낸다. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$-56 = k^3 - 3(3k - 2)k$ $-56 = k^3 - 9k^2 + 6k$ $k^3 - 9k^2 + 6k + 56 = 0$ $P(k) = k^3 - 9k^2 + 6k + 56$ 이라 할 때,

$P(-2) = (-2)^3 - 9(-2)^2 + 6(-2) + 56 = -8 - 36 - 12 + 56 = 0$ 이므로, $P(k)$ 는 $(k + 2)$ 를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하여

인수분해하면, $(k + 2)(k^2 - 11k + 28) = 0$ $(k + 2)(k - 4)(k - 7) = 0$ 따라서 가능한 k 의 값은 $-2, 4, 7$ 이다. 이 값들이 허근을 가질

조건인 $6 - 2\sqrt{7} < k < 6 + 2\sqrt{7}$ 를 만족하는지 확인해야 한다. $2 < \sqrt{7} < 3$ 이므로 $5.2 < 2\sqrt{7} < 5.4$ 정도로 어림할 수 있다.

따라서 k 의 범위는 약 $6 - 5.3 = 0.7 < k < 6 + 5.3 = 11.3$ 이다. 1. $k = -2$: 범위에 속하지 않는다. 2. $k = 4$: 범위에 속한다. 3. $k = 7$

: 범위에 속한다. 따라서 조건을 만족하는 모든 실수 k 의 값은 4 와 7 이다. 이들의 합은 $4 + 7 = 11$ 이다.

[정답] 11

24. 정답 및 풀이

정답: 10

[출제의도] 이차방정식의 판별식과 로그부등식을 이용한다.

[정석 풀이] $t = \log_2 n$ 이라 두면 주어진 방정식은

$x^2 + 2tx + t^2 + 3t - 10 = 0$ 이다. 이 방정식이 실근을 가지려면 판별식이 0 이상이어야 하므로

$\frac{D}{4} = t^2 - (t^2 + 3t - 10) = 10 - 3t \geq 0$ 이다. 따라서 $t \leq \frac{10}{3}$ 이고

$n \leq 2^{10/3} \approx 10.08$ 이다. n 은 자연수이므로 $n = 1, 2, \dots, 10$ 이며 그 개수는 10 개이다.

[정답] 10

25. 정답 및 풀이

정답: 5

[출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 미정계수의 범위를 구하고, 근과 계수의 관계를 활용하여 주어진 조건을 만족시키는 미정계수의 값을 구하는 능력을 평가한다.

[풀이]

****핵심 조건 정리****

주어진 이차방정식 $x^2 - kx + 3k - 8 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 하자.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 3k - 8$ 이다.

또한, 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식 D 는 0 보다 작아야 한다.

$$D = (-k)^2 - 4(1)(3k - 8) < 0$$

$$k^2 - 12k + 32 < 0$$

$$(k - 4)(k - 8) < 0$$

따라서 k 의 값의 범위는 $4 < k < 8$ 이다.

****필요한 식 전개****

문제의 조건에서 두 허근의 제곱의 합이 11 이므로,

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11 \text{ 이다.}$$

곱셈 공식의 변형을 이용하면 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ 이므로,

$$k^2 - 2(3k - 8) = 11$$

$$k^2 - 6k + 16 = 11$$

$$k^2 - 6k + 5 = 0$$

****정답 도출****

위 k 에 대한 이차방정식을 풀면 $(k - 1)(k - 5) = 0$ 이므로 $k = 1$ 또는 $k = 5$ 이다.

판별식 조건에서 $4 < k < 8$ 이므로,

이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 5 이다.

[정답] 5

26. 정답 및 풀이

정답: 10

[출제의도] 나머지정리와 인수정리를 이용하여 특정 조건을 만족하는 이차다항식을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

[정석 풀이] 문제의 조건에 따라, 다항식 $P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지가 1이고, $x - 2$ 로 나눈 나머지가 2이다. 나머지정리에 의하여 다음이 성립한다. $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(1) - 1 = 0$, $P(2) - 2 = 0$ 이므로, 새로운 다항식 $Q(x) = P(x) - x$ 를 생각할 수 있다.

$Q(1) = P(1) - 1 = 0$, $Q(2) = P(2) - 2 = 0$, $Q(1) = 0$, $Q(2) = 0$ 이므로 인수정리에 의해 $Q(x)$ 는 $(x - 1)$ 과 $(x - 2)$ 를 인수로 갖는다. $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로, $Q(x) = P(x) - x$ 또한 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이다. 따라서 $Q(x)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다. $Q(x) = (x - 1)(x - 2)$, $P(x) = Q(x) + x$ 이므로, $P(x) = (x - 1)(x - 2) + x$ 구하고자 하는 값은 $P(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지이므로, 나머지정리에 의해 $P(4)$ 의 값을 구하면 된다. $P(4) = (4 - 1)(4 - 2) + 4 = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$ 따라서 $P(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는 10이다.

[정답] 10

27. 정답 및 풀이

정답: 6

[출제의도] 다항식의 나눗셈과 항등식

[정석 풀이] 다항식의 나눗셈에 대한 관계식에 따라 다음 등식을 세울 수 있다. $(x+1)P(x) - x^3 = (P(x) - x^2)Q(x) + (3x+2)$ 문제에서 $Q(x) = x - 1$ 이므로 이를 위 식에 대입하면 다음과 같다. $(x+1)P(x) - x^3 = (P(x) - x^2)(x-1) + 3x+2$ 이 등식은 x 에 대한 항등식이므로, $P(x)$ 에 대하여 정리하여 $P(x)$ 를 구할 수 있다. 우변을 전개하면, $(x+1)P(x) - x^3 = xP(x) - P(x) - x^3 + x^2 + 3x + 2$ $P(x)$ 를 포함한 항을 좌변으로, 나머지 항을 우변으로 이항하여 정리한다. $(x+1)P(x) - xP(x) + P(x) = x^3 - x^3 + x^2 + 3x + 2$ $(x+1-x+1)P(x) = x^2 + 3x + 2$ $2P(x) = x^2 + 3x + 2$ 따라서 다항식 $P(x)$ 는 다음과 같다. $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)$ 구하고자 하는 $P(2)$ 의 값은 위 식에 $x = 2$ 를 대입하여 계산한다. $P(2) = \frac{1}{2}(2^2 + 3 \cdot 2 + 2) = \frac{1}{2}(4 + 6 + 2) = \frac{1}{2}(12) = 6$

[정답] 6

28. 정답 및 풀이

정답: 5/2

[출제의도] 이차함수와 직선의 위치 관계를 이해하고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가한다.

[정석 풀이] 1. 교점 A, B의 좌표 찾기 함수 $f(x) = a(x+1)^2$ 의 그래프와 직선 $y = x + a$ 가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $a(x+1)^2 = x + a$ 의 실근이다. $a(x^2 + 2x + 1) = x + a$ $ax^2 + 2ax + a = x + a$ $ax^2 + (2a-1)x = 0$ $x(ax + 2a - 1) = 0$ 서로 다른 두 점에서 만나므로 두 실근은 $x = 0$ 과 $x = -\frac{2a-1}{a} = \frac{1-2a}{a}$ 이다. (단, $0 \neq \frac{1-2a}{a}$ 이므로 $a \neq \frac{1}{2}$) 두 교점 A, B의 x 좌표를 각각 x_A, x_B 라 하자. 2. 선분 AB의 중점 M의 좌표 구하기 중점 M의 x 좌표 x_M 은 $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2}(0 + \frac{1-2a}{a}) = \frac{1-2a}{2a}$ 점 M은 직선 $y = x + a$ 위의 점이므로, 중점 M의 y 좌표 y_M 은 $y_M = x_M + a = \frac{1-2a}{2a} + a = \frac{1-2a+2a^2}{2a}$ 따라서 $M = (\frac{1-2a}{2a}, \frac{1-2a+2a^2}{2a})$ 이다. 3. 점 M을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식 구하기 이 직선의 방정식은 $y - y_M = -(x - x_M)$ 이므로 $y = -x + x_M + y_M$ 이다. $x_M + y_M = \frac{1-2a}{2a} + \frac{1-2a+2a^2}{2a} = \frac{2-4a+2a^2}{2a} = \frac{a^2-2a+1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}$ 따라서 직선의 방정식은 $y = -x + \frac{(a-1)^2}{a}$ 이다. 4. 교점 C, D와 선분 CD의 길이 L(a) 구하기 이 직선과 함수 $f(x) = a(x+1)^2$ 의 교점 C, D의 x 좌표는 방정식 $a(x+1)^2 = -x + \frac{(a-1)^2}{a}$ 의 실근이다. $a(x^2 + 2x + 1) = -x + \frac{(a-1)^2}{a}$ $ax^2 + (2a+1)x + a - \frac{(a-1)^2}{a} = 0$ 두 교점 C, D의 x 좌표를 각각 x_C, x_D 라 하면, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $x_C + x_D = -\frac{2a+1}{a}$ $x_C x_D = \frac{1}{a}(a - \frac{(a-1)^2}{a}) = 1 - \frac{a^2-2a+1}{a^2} = \frac{a^2-(a^2-2a+1)}{a^2} = \frac{2a-1}{a^2}$ 선분 CD의 길이는 기울기가 -1 인 직선 위의 두 점 사이의 거리이므로 $L(a) = \sqrt{1 + (-1)^2} |x_D - x_C| = \sqrt{2} \sqrt{(x_C + x_D)^2 - 4x_C x_D}$ $(L(a))^2 = 2((x_C + x_D)^2 - 4x_C x_D) = 2((- \frac{2a+1}{a})^2 - 4(\frac{2a-1}{a^2})) = 2(\frac{4a^2+4a+1}{a^2} - \frac{8a-4}{a^2}) = 2(\frac{4a^2+4a+1-8a+4}{a^2}) = 2(\frac{4a^2-4a+5}{a^2}) = 2(4 - \frac{4}{a} + \frac{5}{a^2})$ 5. L(a)가 최소가 되도록 하는 a의 값 구하기 L(a) 가 최소가 되는 것은 $(L(a))^2$ 이 최소가 될 때와 같다. $\frac{1}{a} = t$ 로 치환하면, $a > 0$ 이므로 $t > 0$ 이다. $(L(a))^2 = 2(5t^2 - 4t + 4)$ $g(t) = 5t^2 - 4t + 4 = 5(t^2 - \frac{4}{5}t) + 4 = 5(t - \frac{2}{5})^2 - 5(\frac{4}{25}) + 4 = 5(t - \frac{2}{5})^2 + \frac{16}{5}$ $g(t)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이므로 $t = \frac{2}{5}$ 일 때 최솟값을 갖는다. 이 값은 $t > 0$ 범위에 포함된다. 따라서 $t = \frac{1}{a} = \frac{2}{5}$ 일 때 L(a) 는 최소가 되며, 이때의 a 값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

[정답] $a = \frac{5}{2}$

29. 정답 및 풀이

정답: 756

[출제의도] 원의 방정식과 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 능력을 평가한다.

[정석 풀이] 점 A의 좌표는 (5, 5) 이고, 두 점 B, C의 좌표를 각각 (x_B, y_B) , (x_C, y_C) 라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 (3, 3) 이므로, 무게중심의 정의에 의해 다음 식이 성립한다. $G_x = \frac{5 + x_B + x_C}{3} = 3 \Rightarrow 5 + x_B + x_C = 9 \Rightarrow x_B + x_C = 4$ $G_y = \frac{5 + y_B + y_C}{3} = 3 \Rightarrow 5 + y_B + y_C = 9 \Rightarrow y_B + y_C = 4$ 선분 BC의 중점을 M이라 하면, M의 좌표는 $(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{4}{2}, \frac{4}{2}) = (2, 2)$ 이다. 점 B와 C는 원 $x^2 + y^2 = 50$ 위의 점이므로, 선분 BC는 원의 현이다. 원의 중심 O(0, 0)와 현 BC의 중점 M(2, 2)를 지나는 직선은 현 BC와 수직이다. 직선 OM의 기울기는 $\frac{2-0}{2-0} = 1$ 이므로, 현 BC를 포함하는 직선의 기울기는 -1 이다. 따라서 직선 BC의 방정식은 점 M(2, 2)를 지나고 기울기가 -1 이므로 다음과 같다. $y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 4 \Rightarrow x + y - 4 = 0$ 삼각형 ABC의 넓이를 구하기 위해 밑변을 BC, 높이를 점 A와 직선 BC 사이의 거리로 설정한다. 높이 h 는 점 A(5, 5)에서 직선 $x + y - 4 = 0$

까지의 거리와 같다. $h = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ 밑변 BC의 길이를 구하기 위해, 직선 $x + y = 4$ 와 원 $x^2 + y^2 = 50$ 의 교점인 B, C의 좌표를 구한다. $y = 4 - x$ 를 원의 방정식에 대입하면, $x^2 + (4 - x)^2 = 50$ $x^2 + 16 - 8x + x^2 = 50$ $2x^2 - 8x - 34 = 0$ $x^2 - 4x - 17 = 0$ 이 이차방정식의 두 근이 x_B , x_C 이다. 근과 계수의 관계에 의해, $x_B + x_C = 4$, $x_B x_C = -17$ $y_B = 4 - x_B$, $y_C = 4 - x_C$ 이므로 $y_C - y_B = (4 - x_C) - (4 - x_B) = x_B - x_C$ 이다. 선분 BC의 길이의 제곱은 다음과 같다.

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (x_C - x_B)^2 + (x_B - x_C)^2 = 2(x_B - x_C)^2$$

$$(x_B - x_C)^2 = (x_B + x_C)^2 - 4x_B x_C = 4^2 - 4(-17) = 16 + 68 = 84 \quad BC^2 = 2 \times 84 = 168 \quad \text{따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.}$$

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{168} \times 3\sqrt{2} = \frac{3}{2} \sqrt{336} = \frac{3}{2} \sqrt{16 \times 21} = \frac{3}{2} \times 4\sqrt{21} = 6\sqrt{21} \quad \text{문제에서 요구하는 값은 } S^2 \quad \text{이므로,}$$

$$S^2 = (6\sqrt{21})^2 = 36 \times 21 = 756$$

[정답] 756

30. 정답 및 풀이

정답: 7/4

[출제외도] 포물선 위의 점을 중심으로 하며 두 직선에 접하는 원의 조건을 이용한다.

[정석 풀이] 원의 중심을 $P(t, y)$ 라 하면 $y = a(t - 2)^2 + 1$ 이다. 원이 x 축과 직선 $3x - 4y + 5 = 0$ 에 동시에 접하므로

$|y| = \frac{|3t - 4y + 5|}{5}$ 이다. 이를 정리하면 원의 중심은 두 직선

$$y = \frac{1}{3}t + \frac{5}{9} \quad \text{또는} \quad y = -3t - 5 \quad \text{위에 있다.}$$

서로 다른 원이 3개가 되려면 포물선은 첫 번째 직선과 두 점에서 만나고, 두 번째 직선과 한 점에서 접해야 한다. 따라서

$$a(t - 2)^2 + 1 = -3t - 5 \quad \text{가 중근을 가져야 한다. 이를 정리하면}$$

$$at^2 + (-4a + 3)t + (4a + 6) = 0 \quad \text{이고, 판별식이 } 0 \quad \text{이므로}$$

$$(-4a + 3)^2 - 4a(4a + 6) = 0 \quad ,$$

$$-48a + 9 = 0 \quad \text{이다. 따라서 } a = \frac{3}{16} \quad \text{이다.}$$

그러므로

$$f(4) = a(4 - 2)^2 + 1 = \frac{3}{16} \times 4 + 1 = \frac{7}{4} \quad \text{이다.}$$

[정답] $\frac{7}{4}$